Maatriksite perturbatsiooniteooriast:
Oletame et me lahendame süsteemi

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{8}$$

kus $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ja $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ on antud ning $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ on otsitav. Oletame et A on antud teatud veaga $\tilde{A} = A + \delta A$. Häiritud lahend rahuldab võrrandisüsteemi

$$(A + \delta A)(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) = \mathbf{b}. \tag{9}$$

Teoreem. Oletame et A on mittesingulaarne ja δA on piisavalt väike nii et

$$\|\delta A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty \le \frac{1}{2}. \tag{10}$$

Siis $(A + \delta A)$ on mittesingulaarne ja

$$\frac{\|\delta\mathbf{x}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty} \le 2\kappa(A)\frac{\|\delta A\|_\infty}{\|A\|_\infty}, \tag{11}$$

kus $\kappa(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty$ on konditsiooniarv.

Teoreemi tõestus.
Lahutades (8) võrrandisüsteemist (9) saame $(A + \delta A)\delta\mathbf{x} = -\delta A\ \mathbf{x}$. Korrutades seda avaldisega $(A + \delta A)^{-1}$ ja võttes normid, saame

$$\|\delta\mathbf{x}\|_\infty = \|-(A+\delta A)^{-1}\ \delta A\ \mathbf{x}\|_\infty \le \left\{\|(A+\delta A)^{-1}\|_\infty \|A\|_\infty\right\} \frac{\|\delta A\|_\infty}{\|A\|_\infty}\|\mathbf{x}\|_\infty\ .$$

Tõestuse lõpetuseks on vaja näidata et loogilistes sulgudes asuv avaldis on hinnatav avaldisega $2\kappa(A)$, või samaväärselt,

$$\|(A + \delta A)^{-1}\|_\infty \le 2\|A^{-1}\|_\infty\ . \tag{12}$$

Hinnangu (12) kontrollimiseks märkame kõigepealt, et juhul kui X on suvaline $n \times n$ reaalarvuline maatriks mis rahuldab tingimust $\|X\|_\infty < 1$, siis $\|X^n\|_\infty \le \|X\|_\infty^n \to 0$ kui $n \to \infty$. Järelikult,

$$(I - X)(I + X + X^2 + \ldots + X^n) = I - X^{n+1} \to I,\ \text{kui } n \to \infty\ .$$

Seega $(I-X)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} X^j$ ja

$$\|(I-X)^{-1}\|_\infty \le \sum_{j=0}^{\infty} \|X^j\|_\infty \le \sum_{j=0}^{\infty} \|X\|_\infty^j = (1-\|X\|_\infty)^{-1} \ . \tag{13}$$

Võime kirjutada

$$(A+\delta A) = \left[I + \delta A \ A^{-1}\right] A. \tag{14}$$

Võtame $X = -\delta A \ A^{-1}$. Eeldusel (10), $\|X\|_\infty \le 1/2 < 1$ ja võime rakendada (13) näitamaks et $(I + \delta A \ A^{-1})$ on mittesingulaarne ja

$$\|(I+\delta A \ A^{-1})^{-1}\|_\infty \le (1 - \| - \delta A \ A^{-1}\|_\infty)^{-1} \le 2 \ .$$

Järelikult (14) annab et $A + \partial A$ on mittesingulaarne ja

$$\|(A+\delta A)^{-1}\|_\infty = \|A^{-1}(I+\delta A \ A^{-1})^{-1}\|_\infty \le 2\|A^{-1}\|_\infty$$

ja seega on(12) tõestatud.