RASKUSKIIRENDUS "TÄHESÕDADES"

KRISTJAN KANNIKE

Filmis "Tähesõjad" on igal planeedil raskuskiirendus sama mis Maal. Miks?

Kuidas sõltub sel juhul planeedi mass tema raadiusest? Kuidas seda seost tegelikkuses realiseerida? [1]

Raskusjõud kahe keha vahel on

$$F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}, \tag{1}$$

kus G on gravitatsioonikonstant, m_1 ja m_2 kehade massid ning r nendevaheline kaugus. Meid huvitab aga väikesele kehale massiga m mjuv raskuskiirendus g planeedi lähedal, mille mass on M ja raadius R.

Newtoni teise seaduse järgi $F = ma$.

Gravitatsioonijud planeedi ja tema *pinnal* oleva keha vahel on ühelt poolt

$$F = \frac{GMm}{R^2}, \tag{2}$$

teisalt *defineeritud* kui

$$F = mg. \tag{3}$$

Leiame, et

$$g = \frac{GM}{R^2}. \tag{4}$$

Kui g on planeedi suurusest sltumata konstant, siis peab olema

$$\frac{M}{R^2} = \frac{g}{G} = \text{const}, \tag{5}$$

s.t. planeedi mass on vrdeline tema raadiuse ruuduga! Tulemus on veider: M viks olla pigem vrdeline R^3, kuid isegi see eeldab, et planeedi tihedus on igal pool sama.

Kui mass on võrdeline raadiuse ruuduga, see tähendab pindalaga, peaks see tähendama, et terve planeedi mass on tema pinna lähedal – ulmefilmiplaneedid on seest tühjad!

Kui suur peab siis olema sfäärilise kesta tihedus? Maa raadius on umbes $R_E = 6400\,\text{km}$ ja mass $M_E = \times 10^{24}\,\text{kg}$. Maa pindala on $S_E = 4\pi R_E^2 = 5 \times 10^8\,\text{km}^2$. he ruutkilomeetri kohta tulev mass on $10^{16}\,\text{kg}$, ühe ruutmeetri kohta $10^{10}\,\text{kg}$.

Kui Maa suuruse planeedi kesta paksus oleks 1 km, on tema tihedus $10^7\,\text{kg/m}^3$. Maa keskmine tihedus on umbes $5500\,\text{kg/m}^3$, ligi kümme tuhat korda väiksem; valge kääbuse täheaine tihedus on vaid 100 korda suurem!

Date: 24. jaanuar 2007. a.

[1] Aitäh Steveile ja Daveile abi eest.

Kui kest ka tekiks, kukuks ta omaenese raskuse all kokku.

On märksa realistlikum viis planeedi pinnal samasugust raskuskiirendust hoida: tuleb muuta tavalise seest täis planeedi raske raud-nikkeltuuma ja suhteliselt väikese tihedusega kesta vahekorda.

Eeldame, et planeedil raadiusega R on tuum raadiusega R_c (mistagi $R_c < R$). Tuuma tihedus olgu ρ_{c} ja planeedi koore tihedus ρ_{s} (mistagi $\rho_{\mathrm{s}} < \rho_{\mathrm{c}}$).

Siis on planeedi mass M tuuma ja koore masside summa:

$$M = V_{\mathrm{c}}\rho_{\mathrm{c}} + V_{\mathrm{s}}\rho_{\mathrm{s}} = \frac{4}{3}\pi R_{\mathrm{c}}^3\rho_{\mathrm{c}} + \left(\frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi R_{\mathrm{c}}^3\right)\rho_{\mathrm{s}} = \frac{4}{3}\pi R^3\left[\rho_{\mathrm{s}} + \chi^3(\rho_{\mathrm{c}} - \rho_{\mathrm{s}})\right], \tag{6}$$

kus defineerime raadiuste suhte $\chi = R_{\mathrm{c}}/R$.

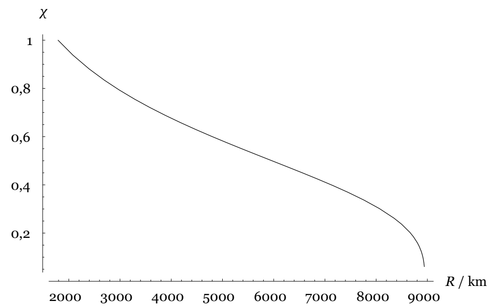
Me teame, et ulmefilmiplaneedi jaoks on $M/R^2 = g/G$. Seega

$$\frac{g}{G} = \frac{4}{3}\pi R\left[\rho_{\mathrm{s}} + \chi^3(\rho_{\mathrm{c}} - \rho_{\mathrm{s}})\right], \tag{7}$$

kust tuuma ja planeedi (kesta) raadiuste suhe on

$$\chi(R) = \sqrt[3]{\frac{-3g/G + 4\pi R\rho_{\mathrm{s}}}{4\pi R(\rho_{\mathrm{s}} - \rho_{\mathrm{c}})}}. \tag{8}$$

Teeme graafiku, kui $\rho_{\mathrm{s}} = 4000\,\mathrm{kg/m^3}$ ja $\rho_{\mathrm{c}} = 20000\,\mathrm{kg/m^3}$.



JOONIS 1. Tuuma ja planeedi raadiuste suhte χ sltuvus planeedi raadiusest R, kui raskuskiirendus planeedi pinnal on g.

Jooniselt näeme, et selle triki abil saame teha planeete nõnda väikese raadiusega kui 1800 km või nõnda suurega kui 8800 km. (Kuna tegu on jämeda hinnanguga, on tegelik vahemik väiksem.)

Et planeedi raadiust veelgi suurendada, hoides g konstantsena, võib lisada talle jääkesta. Jää tihedus on umbes $1000\,\mathrm{kg/m^3}$ (suure rõhu all suurem). Nõnda saab ka 8800 km piiri ületada.