

TARTU ÜLIKOOL  
Matemaatika teaduskond  
Rakendusmatemaatika instituut  
Teoreetilise mehaanika õppetool  
Matemaatika eriala

SVEN LAUR

# LÕPLIKE ELEMENTIDE MEETOD

Bakalaureusetöö

Juhendaja: prof. Jaan Lellep

Autor: ..... ” .....” mai 2001

Juhendaja: ..... ” .....” mai 2001

Õppetooli juhataja: ..... ” .....” mai 2001

Tartu 2001

# Sisukord

Sissejuhatus	2
<b>I Keha deformatsioone ja pingeid kirjeldavad matemaatilised mudelid</b>	<b>3</b>
1 Üldine mudel . . . . .	3
2 Üldise mudeli kohandamine elastse plaadi deformatsioonide uurimiseks . . . . .	10
3 Momentide ja lõikejõudude avaldamine suvalise tasandi suhtes . .	16
<b>II Lõplike elementide meetod plaadi võrrandite lahendamiseks</b>	<b>18</b>
1 Meetodi üldine kirjeldus . . . . .	18
2 Plaadi võrrandite nõrk seade . . . . .	19
3 Lõplike elementide meetodi formuleerimine . . . . .	21
4 Täielikuse ja kooskõla nõuded . . . . .	24
5 Jäikusmaatriksi $\mathbf{K}$ ja koormuse vektori $\mathbf{f}_1$ leidmine lokaalselt . . .	25
6 Rajajõudude vektori $\mathbf{f}_b$ arvutamine lokaalselt . . . . .	27
<b>III Kasutatavad elemendid</b>	<b>29</b>
1 Elementide aproksimatsioon ja kooskõla . . . . .	29
2 Kuue sõlmega kolmnurkelement . . . . .	31
3 Kaheksa sõlmega ristkülikelement . . . . .	37
4 Nelja sõlmega ristkülik- ja nelinurkelement . . . . .	41
5 Nelja sõlmega kolmnurkelement . . . . .	47
<b>IV Integreerimine</b>	<b>52</b>
1 Maatriksite $\nabla \mathbf{N}_\beta^e$ ja $\mathbf{B}_\beta^e$ avaldamine lokaalses teljestikus . . . . .	52
2 Integreerimine lokaalses teljestikus . . . . .	55
3 Rajajõudude vektori arvutatavad komponendid . . . . .	57
4 Määramata rajatingimuste leidmine . . . . .	61
5 Ligikaudne integreerimine . . . . .	62
6 Kasutatavad ligikaudse integreerimise valemid . . . . .	64
<b>V Praktilised tulemused</b>	<b>68</b>
1 Lühike kokkuvõte . . . . .	68
2 Abiklassid . . . . .	70
3 Vektorite ja sõlmede klassid . . . . .	70
4 Erinevad interpolatsiooni klassid . . . . .	73
5 Kujufunktsioonide klassid . . . . .	73
6 Elementide klassid . . . . .	78
<b>Viited</b>	<b>83</b>
<b>Summary</b>	<b>84</b>

## Sissejuhatus

Paljud insener-tehnilised ülesanded on seotud detailide koormamisest tuleneva deformatsiooni hindamisega. Enamasti soovitakse teada saada deformatsioonide ulatust ja piirkoormust, mille korral konstruktsioon puruneb. Reeglina viib probleemi matemaatiline formuleerimine keerukate osatuletestega diferentsiaalvõrranditeni. Seetõttu tehakse mitmeid lihtsustusi alates ülesande mõõtmete vähendamisest lõpetades mitmesuguste ligikaudsete meetoditega. Tüüpiliseks näiteks lihtsustustest on tala- ja plaatide teooria, kus kolmemõõtmeline ülesanne taandatakse vastavalt ühe- ja kahemõõtmeliseks. Ka lihtsustatud juhul on diferentsiaalvõrrandite lahendamine tildjuhul keeruline, seetõttu kasutatakse mitmesuguseid ligikaudse lahendamise meetodeid. Üks tähelepanuväärsemaid on lõplike elementide meetod, mis taandab lahenduse leidmise lineaarsele võrrandisüsteemile.

Järgnevas töös käsitleme esmalt keha elastse deformatsioone kirjeldavat mudelit. Esimeses peatükis vaatleme deformatsioonide üldist kolmemõõtmelist mudelit ning selle lihtsustust Kirchhoff'i plaaditeooriat. Kasutades ära mitmesuguseid hüpoteese on võimalik viieteistkümne tundmatuga diferentsiaalvõrrandisüsteemi asemel lahendada kuue tundmatuga süsteem. Teises peatükis formuleerime lõplike elementide meetodi elastse plaadi jaoks ning käsitleme vajalike suuruste leidmist elementide kaupa. Kolmandas ja neljandas peatükis teeme ära eeltöö lõplike elementide realiseerimiseks arvutiprogrammina: alates elementide kujufunktsioonide tuletamisest lõpetades integreerimisprobleemidega. Viies peatükk dokumenteerib lõplike elementide meetodi realiseerimiseks tehtud tööd: realiseeritud klasse ja nende testimist. Töö suure mahu tõttu on praktiliselt valmis vaid kaks elementi.

Töös on kasutatud palju lineaaralgebra tähiseid, mis lihtsustab kirjepilti ja annab ühtse metoodika lõplike elementide meetodi kasutamiseks muudel juhtudel. Mõningate tulemuste juures on lugejat säästetud keerulistest tehnilistest tuletuskäikudest, mille puudumine ei vähenda lahenduskäigu selgust. Enamus keerukatest lihtsustustest on tehtud kasutades sümbolarvutuspaketti **Maple V 4.00b**.

Allikadena on kasutatud peamiselt raamatut [OttPet92], kuid arvutuslikust ebatäpsusest tulenevate lõplike elementide meetodi vigade kirjeldus vastab raamatule [Cook95]. Eestikeelsete terminite kasutamisel on võetud eeskujuks raamatud [Kirs/Arj99] ja [Lahe98]. Lisaks on viidatud mõningatele artiklitele, mille käsitlemine väljub töö piiridest. Ligikaudsete integreerimismeetodite tuletamiseks kasutatud raamatute [OttPet92] ja [Ka/Mo/Ne] abi.

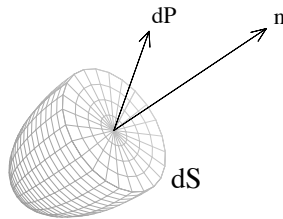
# I peatükk

## Keha deformatsioone ja pingeid kirjeldavad matemaatilised mudelid

### 1 Üldine mudel

Vaatleme tasakaalus olevat koormatud keha st. keha võib olla jõudude mõjul deformeerunud, kuid keha kuju ei muutu ajas. Praktikas pole võimalik keha koormata, ilma et see oma kuju muudaks, kuid paljudel juhtudel pole keha kuju muutmine kui protsess tehniliselt huvitav, oluline on vaid keha lõppkuju. Just nendel juhtudel võetakse aluseks staatilise koormuse mudel, kus eeldatakse, et keha on mingi aja jooksul saavutanud tasakaalu st. keha deformatsioonidest tingitud jõud tasakaalustavad ajas muutumatud välisjõud. Keha kuju kirjeldav matemaatiline mudel jaguneb loomulikul viisil kaheks osaks: keha tasakaalu tagavad võrrandid, deformatsioone iseloomustavad geomeetrilised ning konstitutsioonilised võrrandid. Viimased seovad deformatsioonid ja nendele vastavad elastsusjõud. Tasakaaluvõrrandid ei sõltu materjalist ning kõige üldisemal juhul on tegemist osatuletistega diferentsiaalvõrranditega, kus otsitav suurus sõltub kolmest ruumi koordinaadist. Geomeetriliste võrrandite tuletamisel arvestakse deformatsioonide suurusega. Väiksemate deformatsioonide korral iseloomustavad deformatsioone lihtsad võrrandid. Suuremate deformatsioonide korral on tarvis arvestada kõrgemate liikmetega, mida võis väikeste deformatsioonide korral arvestamata jätta. Konstitutsionaalsed võrrandid on erinevate materjalide korral erinevad, peamiselt kasutatakse elastse, elastse-plastse, jäikplastse, kahestuva, viskoose ja muude materjalide kontseptsioone. Neist kõige lihtsam on elastne, kuna seosed deformatsioonide ja neile vastavate jõudude vahel on lineaarsed ning ei sõltu keha eelnevatest deformatsioonidest. Just sellel põhjusel vaatleme edaspidi elastse materjali kontseptsiooni.

Selleks, et jõuda keha tasakaaluvõrranditeni on tarvis tuua sisse pinged. Eeldatakse, et kehas on vaid kahte tüüpi jõude: jõude mis sõltuvad ruumalast – neid nimetame ruumjõududeks ja jõude mis sõltuvad pindalast – neid nimetame pindjõududeks.

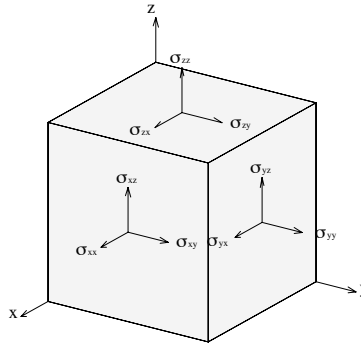


Joonis 1: Pindjõud keha lõpmata väikeses elemendis

Pindjõud  $\mathbf{t}$  defineeritakse kui piirväärtus

$$\mathbf{t} = \lim_{dS \rightarrow 0} \frac{d\mathbf{P}}{dS},$$

kus  $d\mathbf{P}$  on pinnatükile  $dS$  vastav jõud. Loomulikult sõltub pindjõud  $\mathbf{t}$  peale ruumikoordinaatide ka pinna asendist. Ilmneb, et tuues sisse pingetensori  $\mathbf{S}$ , mis on  $3 \times 3$  maatriks, siis on võimalik pindjõud  $\mathbf{t}$  avaldada pinnanormaali ja pingetensori  $\mathbf{S}$  kaudu. Pingetensor defineeritakse koordinaattelgedega risti olevate pindjõudude abil. Olgu  $\mathbf{s}_x$   $x$ -teljega risti oleva pinna pindjõud ning  $\mathbf{s}_y$  ja  $\mathbf{s}_z$  vastavalt  $y$  ja  $z$ -teljega risti olevatele pindadele vastavad pindjõud.



Joonis 2: Pingetensori komponendid.

Siis vastavate pindjõudude komponendid tähistatakse

$$\begin{aligned}\mathbf{s}_x &= (\sigma_{xx} \ \sigma_{xy} \ \sigma_{xz})^T, \\ \mathbf{s}_y &= (\sigma_{yx} \ \sigma_{yy} \ \sigma_{yz})^T, \\ \mathbf{s}_z &= (\sigma_{zx} \ \sigma_{zy} \ \sigma_{zz})^T,\end{aligned}$$

ning vastav pingetensor  $\mathbf{S}$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}.$$

Füüsikalistest kaalutlustest lähtudes võib eeldada, et pindjõud on pidevad. Keha tasakaalu tingimusest ilmneb, et pingetensor  $\mathbf{S}$  on sümmeertiline st.

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx}, \quad \sigma_{xz} = \sigma_{zx}, \quad \sigma_{yz} = \sigma_{zy}.$$

seega on pingetensori  $\mathbf{S}$  määramiseks tarvis teada vaid 6 komponenti. Keha tasakaalu tingimusest on võimalik saada seos

$$\mathbf{t} = n_x \mathbf{s}_x + n_y \mathbf{s}_y + n_z \mathbf{s}_z. \quad (1.1)$$

kus  $\mathbf{n} = (n_x \ n_y \ n_z)^T$  on pinnanormaal. Selle saab kirja panna maatrikskujul

$$\mathbf{t} = \mathbf{S}^T \mathbf{n} = \mathbf{S} \mathbf{n}.$$

Kui võtta suvaline keha osa  $\Omega$ , mille rajapind on  $\Gamma$  on tükati sile<sup>1</sup>, siis loomulik tasakaalu tingimus avaldub integraalsel kujul

$$\int_{\Gamma} \mathbf{t} dS + \int_{\Omega} \mathbf{b} dV = 0,$$

kus  $\mathbf{b}$  on ruumjõud ja  $\mathbf{t}$  on pindjõud. Kirjutades, selle välja komponent haaval saame seosed

$$\int_{\Gamma} t_x dS + \int_{\Omega} b_x dV = 0, \quad \int_{\Gamma} t_y dS + \int_{\Omega} b_y dV = 0, \quad \int_{\Gamma} t_z dS + \int_{\Omega} b_z dV = 0.$$

Asendades võrdusest (1.1) suuruse  $t_x = \mathbf{s}_x^T \mathbf{n}$ , saame võrrandi

$$\int_{\Gamma} \mathbf{s}_x^T \mathbf{n} dS + \int_{\Omega} b_x dV = 0.$$

Kasutades vektori divergentsi mõistet<sup>2</sup>

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z},$$

saab kirja panna Gauss-Ostragradski teoreemi. Kui vektor  $\mathbf{u}$  ja selle komponentide gradiendid on pidevad piirkonnas  $\Omega$ , millel on tükati sile nullnurkadeta rajapind  $\Gamma$ , siis kehtib Gauss-Ostrogradski valem

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} dV = \int_S \mathbf{u}^T \mathbf{n} dS,$$

kus  $\mathbf{n}$  on pinnavälisnormaal. Eeldades tingimuste täidetust, saame võrduse

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{s}_x + b_x) dV = 0.$$

Arvestades piirkonna  $\Omega$  suvalisust, annab see meile keha ühe tasakaaluvõrrandi

$$\operatorname{div} \mathbf{s}_x + b_x = 0$$

Analoogselt saadakse ka ülejäänud kaks tasakaalu võrrandit, seega keha tasakaalu määravad kolm võrrandit

$$\operatorname{div} \mathbf{s}_x + b_x = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{s}_y + b_y = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{s}_z + b_z = 0, \quad (1.2)$$

milles esineva ruumjõu  $\mathbf{b}$  saab määrata konkreetse ülesande tingimustest.

Enne kui tuletame keha siirdeid ja pingeid siduvad seosed, toome sisse siirdevektori  $\mathbf{u}$ , lugedes siirdeks  $\mathbf{u}(x, y, z)$  punkti  $(x, y, z)$  nihet esialgselt asendist

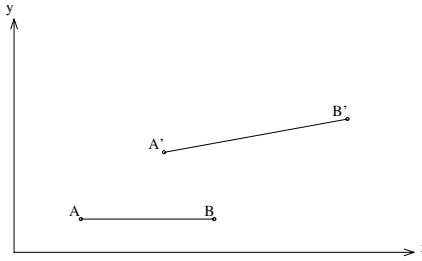
<sup>1</sup>See eeldus on vajalik Gauss-Ostragradski integreerimisvalemi kasutamiseks. Praktilisi kitsendusi see meile ei sea.

<sup>2</sup>Vahel defineeritakse divergents kasutades piirväärtust ja siis on järgnev definitsioon teatud eeldustel järelendus Gauss-Ostragradski valemist. Selleks on tarvis eeldada  $\mathbf{u}$  ja  $\nabla u_x, \nabla u_y, \nabla u_z$  pidevust, kuid kuna me antud teooria raames eeldame vastavate suuruste pidevust, siis on antud definitsioon loomulikum.

välisjõudude mõjul lõppasendisse. Eeldades, et siirdevektor on diferentseeruv, saame võrrandid

$$\begin{aligned} du_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy + \frac{\partial u_x}{\partial z} dz, \\ du_y &= \frac{\partial u_y}{\partial x} dx + \frac{\partial u_y}{\partial y} dy + \frac{\partial u_y}{\partial z} dz, \\ du_z &= \frac{\partial u_z}{\partial x} dx + \frac{\partial u_z}{\partial y} dy + \frac{\partial u_z}{\partial z} dz. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Et saada pingeid, on tarvis teada lõpmata väikeste lõikude pikenemist. Vaatleme lõiku  $AB$ , mille pikkus on  $|AB| = dx$ .



Joonis 3: Lõigu  $AB$  pikenemine siirete mõjul.

Olgu deformatsioonide mõjul tulemuseks lõik  $A'B'$ , siis selle pikkus on

$$|A'B'| = \sqrt{(dx + du_x)^2 + (dy + du_y)^2 + (dz + du_z)^2}.$$

Kui me vaatleme erijuhul lõiku, mis on paralleelne  $x$ -teljega, siis  $dy = dz = 0$  ja seega arvestades võrrandeid (1.3) saame

$$|A'B'| = \sqrt{\left(1 + \frac{\partial u_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)^2} dx.$$

Enamikus teooriates eeldatakse, et keha on vähesel määral deformeerunud st. siirdekomponentide gradiendid on väikesed võrreldes ühikvektoriga:

$$\|\nabla u_x\| \ll 1, \quad \|\nabla u_y\| \ll 1, \quad \|\nabla u_z\| \ll 1. \quad (1.4)$$

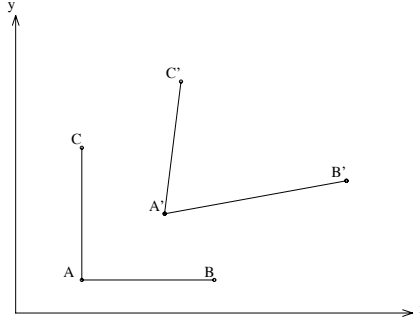
Antud eeldusel võib juure all viimased kaks liidetavat ära jätta ning seega  $x$ -telje suunaline suhteline pikenemine avaldub

$$\varepsilon_{xx} = \frac{|A'B'| - |AB|}{|AB|} \approx \frac{dx + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx - dx}{dx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}.$$

Analoogselt saab leida ka  $y$ - ja  $z$ -teljelise pikenemise, ning seega telgede suunalised deformatsioonid avalduvad kujul

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}. \quad (1.5)$$

Peale telgede suunalise deformatsiooni muutub ka sirgete vaheline nurk. Vaatleme kahte risti asetsevat sirglõiku  $AB$  ja  $AC$ . Lõik  $AB$  on paralleelne  $x$ -teljega ja  $AC$   $y$ -teljega. Välisjõudude tulemusena muutub nende vaheline nurk  $\angle B'A'C'$ .



Joonis 4: Nurga  $\angle ABC$  muutumine siirete mõjul.

Kui eeldada tingimust (1.4), siis võib sirglõikude pikenemise arvestamata jätta st.  $|AB| = |A'B'| = dx$  ja  $|AC| = |A'C'| = dy$ . Seega avaldades vastavad nurgamuutused, saame

$$\sin \Theta_1 = \frac{du_y}{|A'B'|} = \frac{du_y}{dx}, \quad \sin \Theta_2 = \frac{du_x}{|A'C'|} = \frac{du_x}{dy},$$

kus  $\Theta_1$  on nurk lõigu  $A'B'$  ja  $x$ -telje vahel ning  $\Theta_2$  on nurk lõigu  $A'C'$  ja  $y$ -telje vahel. Arvestades võrrandeid (1.3), saame tulemuseks

$$\sin \Theta_1 = \frac{\partial u_y}{\partial x}, \quad \sin \Theta_2 = \frac{\partial u_x}{\partial y}.$$

Kuna väikeste nurkade korral on  $\sin \Theta \approx \Theta$ , siis täisnurk  $\angle BAC$  muutub suuruse

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}$$

võrra, mida nimetatakse nihkedeformatsiooiks. Analoogselt ülejäänud tasapindades olevad nihkedeformatsioonid

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}. \quad (1.6)$$

Konstruksioonist lähtuvalt on nihkedeformatsioonid sümmeetrilised st.  $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$ , sest indeksid määravad mõlemal juhul ära ühe ja sama tasandi.



Sellega oleme käsitlenud kõiki suurusid, mis iseloomustavad deformatsiooni lokaalses skaalas. Võrrandid (1.5) ja (1.6) määravad täielikult ära siirete mõju materjalile. Kuna tuletamisel kasutati eeldust, et nihked on väikesed, siis antud valemid on reaalsusega kooskõlas vaid juhul, kui pikenemised on väiksemad kui 3-5%. Et võrrandite tuletamisel lähtuti vaid geomeetristest kaalutlustest ning ei täpsustatud deformeeritud keha materjali, siis nimetatakse seoseid (1.5) ja (1.6) geomeetristeks seosteks.

Elastse materjali lihtsaks näiteks on kummipael, mille korral kehtib ühemõõtmeline Hooke'i seadus  $\sigma = E\varepsilon$ , kus  $\sigma = \sigma_{xx}$  ja  $\varepsilon = \varepsilon_{xx}$ . Elastse materjali tähsam omadus on pingete sõltumine ainult deformatsioonikomponentidest  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$ ,  $\varepsilon_{zz}$ ,  $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{xz}$  ja  $\gamma_{yz}$ . Pinged ei sõltu sellest, kuidas keha antud deformatsiooniseisundisse jõudis. See muudab arvutused olulisemalt lihtsamaks. Hooke' seaduse üldistus on maatrikskujul olev võrrand

$$\sigma = \mathbf{D}\varepsilon, \quad (1.7)$$

kus  $\mathbf{D}$  on  $6 \times 6$  maatriks ja vektorid  $\varepsilon$  ja  $\sigma$  on vastavalt deformatsioone ja pingeid iseloomustavad vektorid

$$\varepsilon = (\varepsilon_{xx} \ \varepsilon_{yy} \ \varepsilon_{zz} \ \gamma_{xy} \ \gamma_{xz} \ \gamma_{yz})^T, \quad \sigma = (\sigma_{xx} \ \sigma_{yy} \ \sigma_{zz} \ \sigma_{xy} \ \sigma_{xz} \ \sigma_{yz})^T.$$

Füüsikalistest kaalutlustest lähtuvalt saab maatriksile seada mitmeid nõudeid, alates sümmeetriast  $\mathbf{D}^T = \mathbf{D}$  ja maatriksi positiivsest määratusest kuni konkreetsete materjalidele vastavatest nõuetest. Antud töös käsitleme materjali, mis on kõigis suundades samasuguse struktuuriga nõ. isotroopset materjali, sellel juhul  $\mathbf{D}$  on avaldatav kujul

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) \end{pmatrix},$$

kus  $E$  nimetatakse Young'i mooduliks ja  $\nu$  Poisson'i suhteks. Et oleks täidetud  $\mathbf{D}$  positiivse määratuse nõue, peab olema täidetud

$$-1 < \nu < \frac{1}{2}, \quad 0 < E. \quad (1.8)$$

Harilikult on tarvis avaldada deformatsioonid pingete kaudu ja seega on tarvis teada pöördmaatriksit  $\mathbf{D}^{-1}$

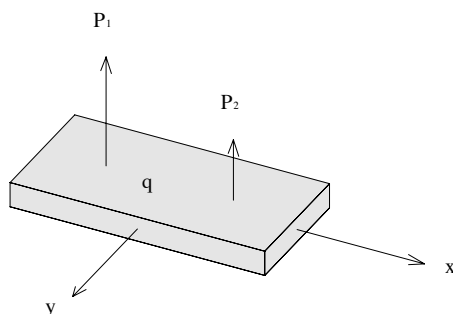
$$\mathbf{D}^{-1} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

Vahel kasutatakse elastse materjali mudelit, kus  $\sigma = \mathbf{D}\varepsilon + \varepsilon_0$ . See mudel iseloomustab hästi temperatuurimuutustest tingitud pingeid, sellel juhul  $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\Delta T)$ , kus  $\Delta T$  on temperatuuride vahe.

Võttes kokku tasakaaluvõrrandid (1.2), geomeetrilised võrrandid (1.5), (1.6) ja konstitutsioonilised võrrandid (1.7) on ülesanne kooskõllaliselt esitatud. On kuus pingeid iseloomustavat suurust  $\sigma$ ; kolm siirdeid iseloomustavat suurust  $\mathbf{u}$ ; kolm pikenemist iseloomustavat suurust  $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}$ ; kolm nihkedeformatsioone iseloomustavat suurust  $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$  – kokku 15 tundmatut suurust. Samas on kolm tasakaaluvõrrandit; kuus geomeetrilist seost kirjeldavat võrrandit; kuus konstitutsioonilist võrrandit – kokku 15 võrrandit. Tasakaaluvõrrandites olevad ruumjõud  $\mathbf{b}$  pole tundmatud, need on iga ülesande korral teada. Ruumjõu  $\mathbf{b}$  füüsikaliseks sisuks on kehale mõjuv väisjõudude poolt tekitatud koormus, näiteks kehale mõjuv raskusjõud. On lihtne veenduda, et kui  $\mathbf{b} \equiv 0$ , siis üheks lahendiks on  $\mathbf{u} = 0$  st. kui kehale ei mõju välisjõud, siis keha kuju ei muutu. Kuna meil on tegu osatuletistega diferentsiaalvõrranditega, siis tuleb ette anda rajatingimused. Füüsikalist sisu arvestades on loomulikud rajatingimused keha pinnal kas siirdevektor  $\mathbf{u}$  või normaali suunaline pingevektor  $\mathbf{t} = \mathbf{S}\mathbf{n}$ . Kuna võrrandite lahendamine nõuab 15 tundamtu leidmist, siis püütakse muutujate arvu piirata lihtsustavate eeldustega, mida selgitame edaspidi.

## 2 Üldise mudeli kohandamine elastse plaadi deformatsioonide uurimiseks

Et vähendada vaatluse all olevate tundmatute arvu, tehakse elastse plaadi deformatsioonide modelleerimisel mitmeid lihtsustusi ja eeldusi. Esimene ja kõige tähtsam eeldus on, et plaat on õhuke st. plaadi paksus on võrreldes plaadi teiste mõõtmetega väike. Plaat peab olema sümmeetriline tasandi suhtes, seda tasandit nimetame plaadi keskpinnaks. Olgu plaadi keskpind  $xy$ -tasandil, siis plaadi paksus  $t$  võib kiüll sõltuda  $x$  ja  $y$  koordinaadist, kuid sümmeetria  $xy$ -tasandi suhtes peab säilima. Plaadile mõjuv koormus peab olema risti plaadi pinnaga. On lubatud nii pindkoormus  $q$ , kui punktidesse rakendatud üksikjõud  $P_i$ .



Joonis 5: Plaadile mõjuv koormus  $q$  ja üksikjõud  $P_1$  ja  $P_2$ .

Ülesande selline püstitus võimaldab meil loobuda  $z$ -telje suunalistest sõltuvustest. Seetõttu on kasulik üle minna tildistatud jõududele ja momentidele st. summeerida pinged üle  $z$ -telje. Kui pingete mõõtühikuks on  $N/m^2$ , siis tildistatud jõudude mõõtühikuks on  $N/m$ . Nii avalduvad  $z$ -telje suunalised lõikejõud

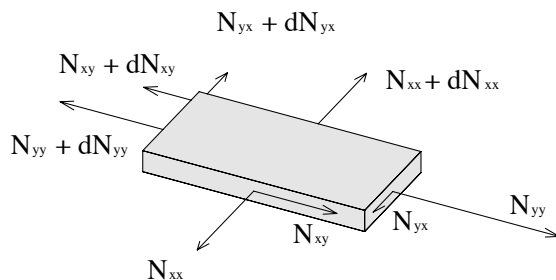
$$Q_{xz} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{xz} dz, \quad Q_{yz} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{yz} dz \quad (1.10)$$

ja  $xy$ -tasandilised membraanjõud

$$N_{xx} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{xx} dz, \quad N_{yy} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{yy} dz, \quad N_{xy} = N_{yx} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{xy} dz. \quad (1.11)$$

Kui tegelda vaid tildistatud jõududega, siis läheb osa deformatsiooni kirjeldavat informatsiooni kaotsi, seega tuleb arvesse võtta ka pingete poolt tekitatud momente

$$M_{xx} = \int_{-t/2}^{t/2} z \sigma_{xx} dz, \quad M_{yy} = \int_{-t/2}^{t/2} z \sigma_{yy} dz, \quad M_{xy} = M_{yx} = \int_{-t/2}^{t/2} z \sigma_{xy} dz. \quad (1.12)$$



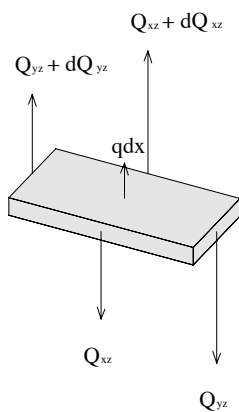
Joonis 6: Lõpmata väikesele plaadielemendile mõjuvad membraanjõud.

Vaadeldes ristküliku kujulist plaadi tükki, peab tasakaalu tingimuste tõttu olema

$$\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} dx dy + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} dx dy = 0, \quad \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} dx dy + \frac{\partial N_{yx}}{\partial x} dx dy = 0.$$

Siit vastavalt  $dx$  ja  $dy$  läbi jagades saame kaks osatuletistega diferentsiaalvõrrandit

$$\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0. \quad (1.13)$$

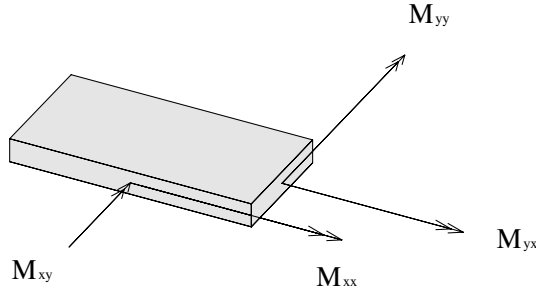


Joonis 7: Lõpmata väikesele plaadielemendile mõjuvad lõikejõud.

Analoogiliselt toimides saame seosed ka  $z$ -teljeliste jõudude tasakaalu jaoks

$$q + \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{yz}}{\partial y} = 0. \quad (1.14)$$

Peale jõudude tasakaalu tuleb rahuldada veel momentide tasakaalu nõue. Vaatame momente plaadi keskpunkti suhtes. Momendid  $M_{yy}$  ja  $M_{xy}$  on suunatud  $x$ -teljele ning  $M_{xx}$  ja  $M_{yx}$   $y$ -telje suhtes.



Joonis 8: Lõpmata väikesele plaadielemendile mõjuvad momendid.

Arvestades löikejõudude poolt põhjustatud lisamomente saame  $x$ - ja  $y$ -teljeliste momentide tasakaalu tingimustest veel kaks võrrandit

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} = Q_{yz}, \quad \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = Q_{xz}. \quad (1.15)$$

Vastavalt joonisele 6 põhjustavad momenente  $z$ -telje sihis vaid membraanjõud  $N_{xy}$  ja  $N_{yx}$ . Arvestades et  $N_{xy} = N_{yx}$ , on tulemuseks võrrand

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} dx - \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} dy = 0$$

Kuna  $dx$  ja  $dy$  on suvaliselt valitud, siis peab olema täidetud tingimus

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0.,$$

Asendades selle võrrandisse (1.13) saame

$$\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} = \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} = 0. \quad (1.16)$$

Seega paraleelselt  $x$  ja  $y$  teljega on membraanjõud  $N_x$  ja  $N_y$  konstantsed ning membraanjõud  $N_{xy}$  on üle kogu plaadi konstantne.

Geomeetriliste seoste tuletamisel kasutame Bernoulli hüpoteesi, st. plaadi tasapinnad, mis on alul risti  $xy$ -tasandiga, jäävad tasapinnalisteks ning on risti

deformeerunud plaadi keskpinnaga. Lugeses plaadi paksuse muutuse tühiseks, on lihtne avaldada plaadi siirded

$$u_x = u_x^0 - z \frac{\partial w}{\partial x}, \quad u_y = u_y^0 - z \frac{\partial w}{\partial y}, \quad u_z = w,$$

kus  $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_0(x, y)$  on plaadi keskpinna siire  $xy$ -tasandil ja  $w = w(x, y)$  on plaadi läbipaine. Arvestades seoseid (1.5) ja (1.6), saame deformatsioonikomponente määravad võrrandid:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x^0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial u_y^0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \\ \varepsilon_{zz} &= 0, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_x^0}{\partial x} + \frac{\partial u_y^0}{\partial y} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \\ \gamma_{xz} &= 0, \\ \gamma_{yz} &= 0. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Need võrrandid kehtivad piki plaadi keskpinna normaali, mis deformatsiooni korral ei tarvitse enam olla risti  $xy$ -tasandiga. Kui lugeda läbipained väikesteks, siis võib normaali lugeda risti olevaks  $xy$ -tasandiga mis lihtsustab oluliselt arvutusi. Sellisel eeldusega teooriat nimetatakse Kirchhoff'i plaadi teooriaks. Kuigi Kirchhoff'i teooria sisaldab endas vastuolu võrrandite (1.10), (1.14) ja võrrandite  $\gamma_{xz} = 0$  ja  $\gamma_{yz} = 0$  vahel on teooria tulemused heas kooskõlas tegelikusega, kui läbipained on väikesed. Edaspidi keskendume just sellele teooriale.

Kuna plaadi deformeerimisel on kõige suurema väärtusega deformatsioonikomponendid  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  ja  $\sigma_{xy}$ , siis võib ülejäänud deformatsioonikomponendid lugeda võrdseks nulliga, sest siis saavutame kooskõla võrrandiga (1.7). Tulemuseks on lihtsustatud konstitutsiooniline seos

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}, \tag{1.18}$$

pingete ja deformatsioonikomponentide vahel, kus

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^{-1} &= \frac{1}{E} \begin{pmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(\nu + 1) \end{pmatrix}, \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= (\varepsilon_{xx} \ \varepsilon_{yy} \ \gamma_{xy})^T, \\ \boldsymbol{\sigma} &= (\sigma_{xx} \ \sigma_{yy} \ \sigma_{xy})^T. \end{aligned}$$

Lihtne on veenduda, et maatriks  $\mathbf{D}$  avaldub kujul

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1 - \nu^2)} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1 - \nu) \end{pmatrix} \tag{1.19}$$

Viies võrrandid maatrikskujule, saab esiteks kirja panna siirete ja deformatsioonikomponentide vahelise geomeetrilise seose

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^0 - z \boldsymbol{\kappa}, \tag{1.20}$$

kus  $\varepsilon$  on plaadi keskpinna pikenemine ja  $\kappa$  on kõverusmaatriks

$$\varepsilon^0 = \left( \frac{\partial u_x^0}{\partial x}, \frac{\partial u_y^0}{\partial x}, \frac{\partial u_x^0}{\partial y} + \frac{\partial u_y^0}{\partial x} \right)^T, \quad \kappa = \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^T. \quad (1.21)$$

Asendades selle võrrandisse  $\sigma = \mathbf{D}\varepsilon$  saame maatriksvõrrandi

$$\sigma = \mathbf{D}\varepsilon^0 - z\mathbf{D}\kappa.$$

Defineerime analoogselt momentide ja membraanjõudude vektori

$$\mathbf{M} = (M_{xx}, M_{yy}, M_{xy})^T, \quad \mathbf{N} = (N_{xx}, N_{yy}, N_{xy})^T.$$

Kasutame siin eelpool tehtud lihtsustavat eeldust, et kuigi läbipaine muutus  $w$  on märgatav, on läbipainde gradient  $\|\nabla w\| \ll 1$  ja seega võib plaadi keskpinna normaali lugeda  $xy$ -teljega risti olevaks<sup>3</sup>. Kasutades valemeid (1.12) ja (1.18) saame seose momentide ja läbipaide vahel

$$\mathbf{M} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma z dz = \mathbf{D}\varepsilon^0 \int_{-t/2}^{t/2} z dz - \mathbf{D}\kappa \int_{-t/2}^{t/2} z^2 dz$$

eeldusel, et maatriks  $\mathbf{D}$  ei sõltu  $z$ -koordinaadist. Paremat poolt integreerides saame tulemuseks

$$\mathbf{M} = -\frac{t^3}{12}\mathbf{D}\kappa. \quad (1.22)$$

Seoseid (1.11) ja (1.18) arvestades, saame maatriksvõrrandi

$$\mathbf{N} = \mathbf{D}\varepsilon^0 t.$$

Membraanjõud sõltuvad vaid plaadi keskpinna pikenemisest ning momendid sõltuvad ainult plaadi läbipaindest. See tuleneb eeldusest, et plaadi keskpinna normaal on samasihiline  $z$ -teljega, mistõttu võib Kirchhoff'i teooria raames lahendada esmalt süsteemi

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \mathbf{D}\varepsilon^0 t, \\ \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} &= \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} = 0, \\ N_{xy} &= \text{const} \end{aligned} \quad (1.23)$$

ja seejärel momente määrava süsteemi

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= -\frac{t^3}{12}\mathbf{D}\kappa, \\ q + \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{yz}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} &= Q_{yz}, \\ \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} &= Q_{xz}. \end{aligned} \quad (1.24)$$

<sup>3</sup>Mõnikord esitatakse plaatide läbipainete teooria selliselt, et momendid, lõike- ja membraanjõud defineeritakse plaadi keskpinna normaali suhtes. Siis on valemid (1.17) täpsed ja lihtsustused tehakse tasakaaluvõrrandi kokkupanemisel. Saadavad tulemused on samad, erineb vaid tuletuskäik.

Seega on membraanjäõudude leidmiseks tarvis lahendada viis võrrandit, mis sisaldavad viit tundmatut:  $u_x^0$ ,  $u_y^0$ ,  $N_{xx}$ ,  $N_{yy}$  ja  $N_{xy}$ . Momentide korral on kuus võrrandit ja kuus tundmatut:  $M_{xx}$ ,  $M_{yy}$ ,  $M_{xy}$ ,  $Q_{xz}$ ,  $Q_{yz}$  ja  $w$ . Seega mõlemad süsteemid on kooskõlalised. Süsteemist (1.24) on võimalik lõikejõud  $Q_{xz}$  ja  $Q_{yz}$  elimineerida: diferentseerides viimast kaht võrrandit ja asendades selle teise võrrandisse, on tulemuseks teist järku osatuletistega diferentsiaalvõrrand

$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + q = 0. \quad (1.25)$$

Momendid on samuti võimalik elimineerida: diferentseerides esimest võrrandit sobivalt komponent haaval ja asendades tulemused võrrandisse (1.25), on tulemuseks neljandat järku osatuletistega diferentsiaalvõrrand läbipainde  $w$  suhtes. Kui elastsusmaatriks  $\mathbf{D}$  on konstantne, siis saab võrrand kuju

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{12(1-\nu^2)}{Et^3}q. \quad (1.26)$$

Lõplike elementide rakendamise seisukohalt on otstarbekas vaadata süsteemi (1.25), sest selle võrrandi järk on madal ja sisaldab küllat vähe tundmatuid. Kuna süsteem (1.25) on osatuletistega statsionaarne diferentsiaalvõrrand, siis on tarvis ülesande täielikuks lahendamiseks anda veel rajatingimused. Rajatingimuseks võib ette anda plaadi läbipainde, läbipainde tuletise või momendid ja lõikejõudud. Enam esinevad variantid on

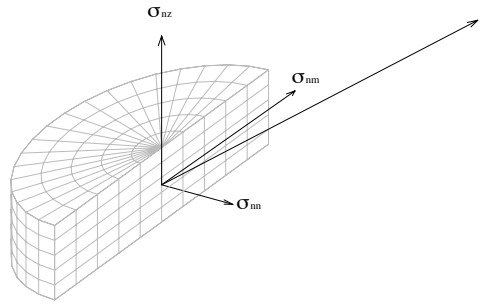
1. plaadi läbipainde  $w$  ja kalde  $\frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}}$  andmine rajal;
2. plaadi läbipainde  $w$  ja välisnormaali suunalise momendi  $M_{nn}$  andmine rajal;
3. plaadi servale mõjuva efektiivse lõikejõu  $Q_{nz} + \frac{\partial M_{nm}}{\partial \mathbf{m}}$  ja välisnormaali suunalise momendi  $M_{nn}$  andmine.

Näiteks esimesest rajatingimusest on plaadi jäik kinnitus, mille korral  $w = const$  ja  $\frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} = const$ . Plaadi serva fikseerimiseks on Bernoulli hüpoteesist tõttu vaja kolme suurust  $w$ ,  $\frac{\partial w}{\partial \mathbf{m}}$  ja  $\frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}}$ , kuid andes ette  $w$  oleme samas ette andnud ka rajasihilise osatuletise  $\frac{\partial w}{\partial \mathbf{m}}$  ning seetõttu on tarvis ette anda vaid suurused  $w$  ja  $\frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}}$ . Teise rajatingimuse näiteks on vabalt toetatud serv, mille korral  $w = const$  ja  $M_{nn} = 0$ . Kolmanda rajatingimuse näiteks on vaba serv, mille korral  $Q_{nz} + \frac{\partial M_{nm}}{\partial \mathbf{m}} = 0$  ja  $M_{nn} = 0$ .



### 3 Momentide ja lõikejõudude avaldamine suvalise tasandi suhtes

Kuna plaadi rajapind ei pruugi olla paralleelne  $xz$  või  $yz$ -tasandiga, siis on meil tarvis momentide ja lõikejõudude avaldasi suvalise  $xy$ -tasandiga risti oleva tasandi suhtes.



Joonis 9: Normaal- ja tangentsiaalpinged plaadi rajal.

Olgu meil vektorid  $\mathbf{m}$  ja  $\mathbf{n}$   $xy$ -tasandil risti olevad ühikvektorid, kusjuures  $\mathbf{n}$  ja  $\mathbf{m}$  on sama orientatsiooniga nagu baasivektorid. Pindjõud  $\mathbf{t}$  on avaldatav valemist(1.1)

$$\begin{aligned} t_x &= \sigma_{xx}n_x + \sigma_{yx}n_y \\ t_y &= \sigma_{xy}n_x + \sigma_{yy}n_y \\ t_z &= \sigma_{xz}n_x + \sigma_{yz}n_y \end{aligned}$$

Defineerides  $\sigma_{nm}$ ,  $\sigma_{nm}$  ja  $\sigma_{nz}$  kui pindjõu  $\mathbf{t}$  vastavasuunalised komponendid<sup>4</sup>, saame seosed

$$\begin{aligned} \sigma_{nm} &= \mathbf{n}^T \mathbf{t} = n_x^2 \sigma_{xx} + 2n_x n_y \sigma_{xy} + n_y^2 \sigma_{yy}, \\ \sigma_{nm} &= \mathbf{m}^T \mathbf{t} = n_x m_x \sigma_{xx} + (n_y m_x + n_x m_y) \sigma_{xy} + n_y m_y \sigma_{yy}, \\ \sigma_{nz} &= \mathbf{e}_z^T \mathbf{t} = n_x \sigma_{xz} + n_y \sigma_{yz}. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Avaldame võrrandite (1.27) abil normaali suunalise momendi

$$\begin{aligned} M_{nn} &= \int_{-t/2}^{t/2} z \sigma_{nn} dz = \int_{-t/2}^{t/2} z (n_x^2 \sigma_{xx} + 2n_x n_y \sigma_{xy} + n_y^2 \sigma_{yy}) dz = \\ &= n_x^2 M_{xx} + 2n_x n_y M_{xy} + n_y^2 M_{yy} \end{aligned}$$

<sup>4</sup>Nii võib tuletada tuletada pingetensori  $\mathbf{S}$  muutumise reegli koordinaatide ortogonaalse teisenduse korral, aga antud töös see meile huvi ei paku.

Analoogselt tänu seoste (1.27) saame üleminekuvalemid momentide ja löikejõu jaoks

$$\begin{aligned} M_{nn} &= n_x^2 M_{xx} + 2n_x n_y M_{xy} + n_y^2 M_{yy}, \\ M_{nm} &= n_x m_x M_{xx} + (n_y m_x + n_x m_y) M_{xy} + n_y m_y M_{yy}, \\ Q_{nz} &= n_x Q_{xz} + n_y Q_{yz}. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Lähtudes eelnevatest tulemustest, tuletame nüüd seose, mida tarvis vaid lõplike elementide meetodi püstituse formuleerimiseks. Olgu  $v$  pidevalt diferentseeruv funktsioon, siis

$$\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} = (\nabla v)^T \mathbf{n}, \quad \frac{\partial v}{\partial \mathbf{m}} = (\nabla v)^T \mathbf{m}. \quad (1.29)$$

Võrdused (1.28) on maatrikskujul üles kirjutatavad

$$M_{nn} = \mathbf{n}^T \mathbf{A} \mathbf{n}, \quad M_{nm} = \mathbf{m}^T \mathbf{A} \mathbf{n}, \quad \text{kus } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} M_{xx} & M_{xy} \\ M_{xy} & M_{yy} \end{pmatrix},$$

ja seda arvestades saame üles kirjutada järgmise maatriksvõrduse

$$\mathbf{n} M_{nn} + \mathbf{m} M_{nm} = (\mathbf{n} \mathbf{n}^T + \mathbf{m} \mathbf{m}^T) \mathbf{A} \mathbf{n} \quad (1.30)$$

Kuna vektorid  $\mathbf{n}$  ja  $\mathbf{m}$  on ortogonaalsed, siis

$$n_x = \pm m_y, \quad n_y = \mp m_x,$$

millest järeldub, et võrduses (1.30) paremal pool olev  $2 \times 2$  maatriks on ühikmaatriks ja seetõttu kehtib võrdus

$$\mathbf{n} M_{nn} + \mathbf{m} M_{nm} = \mathbf{A} \mathbf{n}. \quad (1.31)$$

Korrutades seda võrdust paremalt poolt maatriksiga  $(\nabla v)^T$ , saame seoste (1.29) tõttu

$$\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} M_{nn} + \frac{\partial v}{\partial \mathbf{m}} M_{nm} = \left( \frac{\partial v}{\partial x} M_{xx} + \frac{\partial v}{\partial y} M_{xy} \right) n_x + \left( \frac{\partial v}{\partial x} M_{xy} + \frac{\partial v}{\partial y} M_{yy} \right) n_y. \quad (1.32)$$

## II peatükk

# Lõplike elementide meetod plaadi võrrandite lahendamiseks

### 1 Meetodi üldine kirjeldus

Plaadi käitumist kirjeldav matemaatiline mudel on keeruline: momentide  $M$  suhtes on tegu teist järku osatuletistega diferentsiaalvõrranditega ning läbipainde  $w$  suhtes on tegu neljandat järku osatuletistega diferentsiaalvõrrandiga. Seega tõesande analüütiline lahendamine on võimalik vaid erijuhtudel, mistõttu on olulisel kohal ligikaudsed lahendusmeetodid. Nii võib kasutada erinevaid diferentsiskeeme: otsides lahendi väärtust fikseeritud punktides ja lähendades vastavaid osatuletisi diferentsisuhetega. Selliste meetodite puhul on probleemiks nii tekkivate lineaarsete võrrandisüsteemide suurus ja lahendatavus kui ka keerulisemate kujuga plaadi rajatingimuste aproksimeerimine. Üheks mõnevõrra paindlikumaks meetodiks on lõplike elementide meetod, mille korral lahendi määramispiirkond jagatakse väiksemateks elementideks. Igas elemendis aproksimeeritakse tundmatut suurust polünoomidega. Elemendis valitakse vastavalt tõesandele ja elemendi kujule mitu sõlmpunkti. Aproksimatsioon valitakse nii, et funktsiooni väärtused või nende osatuletised sõlmpunktides määravad tiheselt aproksimatsiooni kuju. Elementide aproksimatsioon üldistatakse kogu kehale. Seejärel asendatakse diferentsiaalvõrrandite süsteem samaväärsete integraalsete võrranditega – tõesande nõrga seadega. Nõrk seade sisaldab suvalist küllalt siledat funktsiooni  $v$ . Nõrga seade lahendamine on teatud tingimustel samaväärne esialgse tõesandega. Ülesande ligikaudsel lahendamisel võetakse suvaline funktsioon  $v$  konkreetsest funktsioonide klassist ja leitakse määramata konstandid nii, et antud funktsioonide korral rahuldaks ligikaudne lahend täpselt võrrandit. Sõltuvalt funktsioonide klassist on võimalik saada erinevaid lahendusmeetodeid: alates punkt-kollakatsioon ja lõik-kollakatsioon meetoditest ja lõpetades vähimruutude ja Galerikini meetodiga. Galerikini meetod ongi lõplike elementide meetodi tuumaks. Selle korral tekib lineaarvõrrand otsitavate suuruste suhtes. Reeglina puudub sellel tihene lahend, kuid rajatingimuste asendamisel võrrandisse, saame tiheselt lahenduva süsteemi. Ligikaudse lahendi koondumist täpselt lahendiks on võimalik teatud eeldustel hinnata [Zin77] ja [Hug87].

Praktiliselt kui elemendid täidavad kooskõla ja täielikuse tingimusi, mida käsitleme edaspidi, siis lahend koondub elementide suuruse vähendamisel täpselt lahendiks.

## 2 Plaadi võrrandite nõrk seade

Plaadi tasakaaluvõrrand on väikeste läbipainete korral kujul (1.25)

$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + q = 0.$$

Nõrga seade saamiseks korrutame võrrandi läbi suvalise funktsiooniga  $v$  ja integreerime üle piirkonna<sup>5</sup>  $\Omega$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} dS + \int_{\Omega} v \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} dS + \int_{\Omega} v \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dS + \\ \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} dS + \int_{\Omega} v q dS = 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Edasistes teisendustes kasutame Greene'i valemite erikuju<sup>6</sup>

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \phi \frac{\partial \psi}{\partial x} dS &= \int_{\Gamma} \phi \psi n_x dl - \int_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial x} \psi dS \\ \int_{\Omega} \phi \frac{\partial \psi}{\partial y} dS &= \int_{\Gamma} \phi \psi n_y dl - \int_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial y} \psi dS, \end{aligned} \quad (2.2)$$

kus  $\Gamma$  on piirkonna  $\Omega$  raja ja  $\mathbf{n}$  on normaalvektor. Rakendame seda valemile (2.1), tulemuseks on võrrand

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} v \left( \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) dl - \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x} \left( \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) dS + \\ \int_{\Gamma} v \left( \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} \right) dl - \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial y} \left( \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} \right) dS + \int_{\Omega} v q dS = 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Kasutades seoseid (1.24) ja (1.28) eelmise võrrandi joonintegraalides, saame lihtsustada

$$\begin{aligned} I_{\Gamma} = \int_{\Gamma} v \left( \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) dl + \int_{\Gamma} v \left( \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} \right) dl = \\ \int_{\Gamma} v Q_{xz} n_x dl + \int_{\Gamma} v Q_{yz} n_y = \int_{\Gamma} v Q_{nz} dl. \end{aligned}$$

Rakendades veel kord Greene'i valemid kahekordses integraalis

$$I_{\Omega} = \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x} \left( \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) + \frac{\partial v}{\partial y} \left( \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} \right) dS, \quad (2.4)$$

on tulemuseks valem

$$\begin{aligned} I_{\Omega} = \int_{\Gamma} \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial x} M_{xx} + \frac{\partial v}{\partial y} M_{xy} \right) n_x + \left( \frac{\partial v}{\partial x} M_{xy} + \frac{\partial v}{\partial y} M_{yy} \right) n_y \right] dl - \\ \int_{\Omega} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} M_{xx} + 2\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} M_{xy} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} M_{yy} \right) dS \end{aligned}$$

<sup>5</sup>Siin ja edaspidi eeldame, et piirkond  $\Omega$  on tükati sileda rajaga  $\Gamma$ , millel puuduvad nullnurgad, sest siis saab rakendada Gauss-Ostrogradski valemit

<sup>6</sup>Harilikult antakse Greene' valemid kujul  $\int_{\Omega} \frac{dP}{dx} dS = \int_{\Gamma} P dy$  ja  $\int_{\Omega} \frac{dQ}{dy} dS = -\int_{\Gamma} Q dx$ . Kasutades normaal ja puutujavektorite paari positiivset orientatsiooni, saab lihtsalt avaldada  $dy = n_x dl$  ja  $dx = -n_y dl$ . Võttes  $P = Q = \phi \psi$ , saamegi antud valemid.

Kasutades valemit (1.32) lihtsustub avaldis veelgi

$$I_{\Omega} = \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} M_{nn} + \frac{\partial v}{\partial \mathbf{m}} M_{nm} \right) dl - \int_{\Omega} (\nabla_2 v)^T \mathbf{M} dS, \quad (2.5)$$

kus operaator  $\nabla_2$  on defineeritud vektorina

$$\nabla_2 = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}, 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right)^T. \quad (2.6)$$

Integreerides ilmset võrdust

$$\frac{\partial v}{\partial \mathbf{m}} M_{nm} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{m}} v M_{nm} - v \frac{\partial M_{nm}}{\partial \mathbf{m}},$$

üle raja joone  $\Gamma$  saame tulemuseks

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial \mathbf{m}} M_{nm} = \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \mathbf{m}} v M_{nm} - \int_{\Gamma} v \frac{\partial M_{nm}}{\partial \mathbf{m}} \quad (2.7)$$

Kuna suvalise integreeruva diferentsiaaliga funktsiooni  $\phi$  korral kehtib

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{m}} dl = \int_{x_0}^{x_0} \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \int_{y_0}^{y_0} \frac{\partial \phi}{\partial y} dy = 0,$$

siis asendades selle võrdusesse (2.7) saame võrduse

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial \mathbf{m}} M_{nm} = - \int_{\Gamma} v \frac{\partial M_{nm}}{\partial \mathbf{m}} \quad (2.8)$$

Kasutades seoseid (2.5) ja (2.8) saab tasakaaluvõrrand lõpliku kuju

$$\int_{\Omega} (\nabla_2 v)^T \mathbf{M} dS = \int_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} M_{nn} dl - \int_{\Gamma} v \left( Q_{nz} + \frac{\partial M_{nm}}{\partial \mathbf{m}} \right) dl - \int_{\Omega} v q dS, \quad (2.9)$$

mida nimetataksegi ülesande nõrgaks seadeks. Kui nõrga seade lahend  $u$  on kaks korda pidevalt diferentseeruv, siis on kõik võrdused pööratavad ja lahend osutub vastavalt Lagrange'i lemmale<sup>7</sup> esialgse tasakaaluvõrrandi lahendiks.

Võrdusest (2.9) on näha, et üheks korrektseks rajatingimuste komplektiks (Kirchhoff'i rajatingimusteks) on  $M_{nn}$  ja  $Q_{nz} + \frac{\partial M_{nm}}{\partial \mathbf{m}}$ . Füüsikalisesest vaatenurgast pole olulised lõikejõud  $Q_{nz}$  ja momendi tuletis  $\frac{\partial M_{nm}}{\partial \mathbf{m}}$  eraldi, vaid ainult nende summa, mida nimetatakse efektiivseks lõikejõuks.

<sup>7</sup>Matemaatilise füüsika võrrandites näidatakse, et  $\int_{\Omega} v \phi dS = 0$  ja  $v$  on suvaline lõpmatu arv kordi diferentseeruv funktsioon ja  $\phi$  on pidev, siis  $\phi \equiv 0$  kogu piirkonnas  $\Omega$ . Meie olukorras tähendab see, et  $u$  on esialgse ülesande lahend.

### 3 Lõplike elementide meetodi formuleerimine

Formuleerime nüüd lõplike elementide meetodi, jättes esialgu täpsustamata kasutatavate elementide kuju ja aproksimatsioonitüübi. Otsitavaks suuruseks on plaadi läbipaine  $w$ . Eeldame vaid et igas elemendis on antud teatud arv sõlmi, ning nendes sõlmedes on võimalik fikseerida teatud tingimusi aproksimatsiooni  $w_{app}$  kohta. Harilikult antakse sõlmedes ette aproksimatsiooni  $w_{app}$ , meie töös antakse mõningates sõlmedes ette ka aproksimatsiooni osatuletised  $\frac{\partial w_{app}}{\partial \mathbf{e}}$  teatud suunas  $\mathbf{e}$ . Kuna aproksimatsioon elemendis peab olema polünoomiaalsel kujul, siis

$$w_{app} = \mathbf{p}\alpha, \quad (2.10)$$

kus reavektor  $\mathbf{p}$  sisaldab endas vajaliku arvu monoome ja  $\alpha$  on kordajate vektor

$$\mathbf{p} = (1, x, y, x^2, xy, y^2, \dots), \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)^T.$$

Andes kordajate  $\alpha$  määramiseks elemendis ette  $n$  tingimust  $\mathbf{a}^e$ , saame vektori  $\alpha$  määramiseks lineaarvõrrandi

$$\mathbf{a}^e = \mathbf{C}\alpha, \quad (2.11)$$

kus maatriksi  $\mathbf{C}$  reas on kas vektori  $\mathbf{p}$  väärtus sõlmes või veidi keerulisem avaldis, sõltuvalt sellest, kas reale vastav tingimus on aproksimatsiooni  $w_{app}$  väärtus sõlmes või selle tuletis suunas  $\mathbf{e}$ . Et mitte lahendada antud ülesannet iga tingimuste komplekti  $\mathbf{a}^e$  korral eraldi, võib tuua sisse järgmise tähistuse

$$\mathbf{N}^e = \mathbf{p}\mathbf{C}^{-1}, \quad (2.12)$$

sest siis

$$w_{app} = \mathbf{p}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{a}^e = \mathbf{N}^e\mathbf{a}^e. \quad (2.13)$$

Reavektori  $\mathbf{N}^e$  komponente nimetatakse elemendi kujufunktsioonideks, kusjuures iga tingimusega on seotud üks kujufunktsioon. Näitame nüüd tõe olulise kujufunktsiooni omaduse

$$A_j(N_i)(P_j) = \begin{cases} 1, & \text{kui } i = j, \\ 0, & \text{vastasel korral,} \end{cases} \quad (2.14)$$

kus  $A_j$  on tingimusega  $j$  seotud operaator ja  $P_j$  tingimusega  $j$  seotud sõlm. Harilikult on operaator  $A_j$  lihtsalt ühikoperaator st.  $A_j(N_i) = N_i$  või osatuletis suunas  $\mathbf{e}^j$  st.  $A_j(N_i) = \frac{\partial N_i}{\partial \mathbf{e}^j}$ , vastavalt tingimusele  $j$ . Põhjendus on ilmne: andes ette tingimuste komplekti

$$\mathbf{a}^e = \mathbf{e}_i = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{i-1}, 1, 0, \dots, 0)$$

on  $w_{app} = N_i^e$  ja samas peavad kehtima tingimused  $A_j(w_{app})(P_j) = a_j^e$ .

Tükeldades plaadi elementideks nii, et iga elemendi rajal olev sõlm on ka naaberelemendi sõlm ja mõlemas elemendis antakse ette samad tingimused, saab

<sup>8</sup>Enamike lõplike elementide meetodiga lahendatavate ülesannete korral välditakse osatuletistega seotud tingimusi ja siis pole tarvis operaatorit  $A_j$  sisse tuua.

elemendi kujufunktsioone loomulikult jätkata üle kogu plaadi. Nummerdame elementides aproksimatsioonile seatud tingimused nii, et oleks võimalik defineerida globaalne tingimusele  $i$  vastav kujufunktsioon  $N_i$

$$N_i(x, y) = \begin{cases} N_i^e(x, y), & \text{kui } (x, y) \text{ on elemendis } \beta \in I_i \\ 0, & \text{vastasel korral,} \end{cases} \quad (2.15)$$

kus  $I_i$  on elementide indeksite hulk, mis sisaldavad tingimusega  $i$  seotud sõlme. Ainukesed punktid, kus kujufunktsioonil  $N_i$  võivad olla erinevad väärtused, on elementide rajad. Kui sõlmes on etteantud läbipaine, siis vastavalt seosele (2.14) langevad kujufunktsiooni väärtused kokku. Kui sõlmes on antud osatuletis, siis tuleb seda eraldi näidata. Üldiselt püütakse elemendid valida nii, et  $N_i$  oleks pidev, kuid seda käsitleme täpsemalt edaspidi. Olgu nüüd üle kogu plaadi aproksimatsioon  $w = \mathbf{N}\mathbf{a}$ , kus  $\mathbf{a}$  on aproksimatsioonile seatud tingimuste vektor, mis esialgu on määramata. Momentide arvutamiseks on meil tarvis teada vektorit  $\kappa$ . Vastavalt võrdustele (1.20), (1.21) ja (2.6) on

$$\kappa = \nabla_2 w = \mathbf{B}\mathbf{a}, \quad (2.16)$$

kus maatriks  $B$  on avaldatav

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x^2} & \frac{\partial N_2}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial N_n}{\partial x^2} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y^2} & \frac{\partial N_2}{\partial y^2} & \cdots & \frac{\partial N_n}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial N_1}{\partial x \partial y} & 2\frac{\partial N_2}{\partial x \partial y} & \cdots & 2\frac{\partial N_n}{\partial x \partial y} \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

Plaadi võrranditest (1.24) saab avaldada momentide vektori

$$\mathbf{M} = -\frac{t^3}{12}\mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{a} \quad (2.18)$$

Vastavalt Galjerkini meetodile tuleb nõrgas seades (2.9) võtta suvaline funktsioon  $v$  kujul

$$v = \mathbf{N}\mathbf{c} = \mathbf{c}^T \mathbf{N}^T,$$

kus  $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$  on suvaline reaalarvuliste kordajatega vektor. Nõrgas seades (2.9) on tarvis arvutada veel suurused

$$\nabla_2 v = \mathbf{B}\mathbf{c}, \quad \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} = (\nabla v)^T \mathbf{n} = \mathbf{c}^T (\nabla \mathbf{N})^T \mathbf{n},$$

kus

$$\nabla \mathbf{N} = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial N_n}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \cdots & \frac{\partial N_n}{\partial y} \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

Asendame need võrrandid nõrka seadesse (2.9), tulemuseks on maatriksvõrrand

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^T \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{M} dS &= \mathbf{c}^T \int_{\Gamma} \nabla \mathbf{N}^T \mathbf{n} M_{nn} dl - \mathbf{c}^T \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T \left( Q_{nz} + \frac{\partial M_{nm}}{\partial m} \right) dl \\ &\quad - \mathbf{c}^T \int_{\Omega} \mathbf{N}^T q dS. \end{aligned}$$

Liikmeid ühele poole viies, saame maatriksvõrrandi

$$\mathbf{c}^T \left[ - \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{M} dS + \int_{\Gamma} \nabla \mathbf{N}^T \mathbf{n} M_{nm} dl - \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T \left( Q_{nz} + \frac{\partial M_{nm}}{\partial m} \right) dl - \int_{\Omega} \mathbf{N}^T q dS \right] = 0$$

Võttes vektoriks  $\mathbf{c} = \mathbf{e}_i, i = 1, 2, \dots, n$  on lihtne näha, et nurksulgudes oleva avaldise iga komponent on null ja seega kehtib võrdus

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{M} dS = \int_{\Gamma} \nabla \mathbf{N}^T \mathbf{n} M_{nm} dl - \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T \left( Q_{nz} + \frac{\partial M_{nm}}{\partial m} \right) dl - \int_{\Omega} \mathbf{N}^T q dS \quad (2.20)$$

Asendades siia võrduse (2.18) saame lõplike elementide formuleeringu elastsete plaatide jaoks

$$\left( - \int_{\Omega} \frac{t^3}{12} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dS \right) \mathbf{a} = \int_{\Gamma} \nabla \mathbf{N}^T \mathbf{n} M_{nm} dl - \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T \left( Q_{nz} + \frac{\partial M_{nm}}{\partial m} \right) dl - \int_{\Omega} \mathbf{N}^T q dS \quad (2.21)$$

Toome sisse tähistused

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \frac{t^3}{12} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dS, \quad (2.22)$$

$$\mathbf{f}_b = \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T \left( Q_{nz} + \frac{\partial M_{nm}}{\partial m} \right) dl - \int_{\Gamma} \nabla \mathbf{N}^T \mathbf{n} M_{nm} dl, \quad (2.23)$$

$$\mathbf{f}_i = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T q dS, \quad (2.24)$$

siis saab eelneva võrduse kirjutada lõplike elementide meetodi kanoonilisel kujul

$$\mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{f}_b + \mathbf{f}_i. \quad (2.25)$$

Paremal pool olevad rajatingimuste vektor  $\mathbf{f}_b$  ja koormuse vektor  $\mathbf{f}_i$  on leitavad raja- ja koormamistingimustest. Jäikusmaatriks  $\mathbf{K}$  ei sõltu kehale rakendatavast koormusest ega ka rajatingimustest, seega on lõplike elementide meetodi korral lihtne muuta rajatingimusi ja plaadile rakendatavat koormust, mis on meetodi tks eeliseid.

Lõplike elementide meetodi korral on maatriksi  $\mathbf{K}$  read lineaarselt sõltuvad [OttPet92, lk. 170], mistõttu tuleb alati määrata tingimuste vektori  $\mathbf{a}$  mõned elemendid algtingimustest. See on loomulik, sest rajatülesandel on ilma sobivaid rajatingimusi fikseerimata lõpmata palju lahendeid. Neljandas peatükis näitame, et osad rajatingimuste vektori komponendid  $\mathbf{f}_b$  pole kõikide rajatingimuste korral määratavad, seetõttu langeb võrrandisüsteemist osa ridu välja. Süsteem lahendub üheselt ainult siis, kui

$$A_{\mathbf{f}_b} \leq T_{\mathbf{a}},$$

kus  $A_{\mathbf{f}_b}$  on arvutatute komponentide arv vektoris  $\mathbf{F}_b$  ja  $T_{\mathbf{a}}$  on rajatingimustest teada olevate komponentide arv vektoris  $\mathbf{a}$ . Kuna meil ei ole *a priori* teada, et allesjäänud võrrandisüsteemi kõik read on lineaarselt sõltumatud, siis ei pruugi saadud võrrandisüsteem üheselt lahenduda. Kui

$$A_{\mathbf{f}_b} < T_{\mathbf{a}},$$

siis võib saadud süsteem olla isegi vastuoluline.



## 4 Täielikuse ja kooskõla nõuded

Lõplike elementide meetodi koondumise üheks piisavaks tingimuseks on täielikuse ja kooskõla nõuded. Antud ülesande korral on täielikuse nõued [OttPet92, lk. 360] järgmised:

- läbipainde  $w$  aproksimatsioon peab täpselt esitama suvalist plaadielemendi liikumist ruumis;
- läbipainde  $w$  aproksimatsiooniga peab olema võimalik esitada suvalist plaadielemendis konstantset kõverusmaatriksit  $\kappa$ .

Kuna plaadielement on tasandiline, siis selle liikumise täpseks esituseks on vaja, et  $w$  sisaldaks lineaarliikmeid. Tulenevalt kõverusmaatriksi  $\kappa$  kujust (1.21) on tarvis aproksimatsiooni võtta teise astme monoomid, seega täielik aproksimatsioon on kujul

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \text{kõrgemat järku liikmed.} \quad (2.26)$$

Elementide kooskõla nõuded [OttPet92, lk. 360] on järgmised

1. kahe elemendi piiril peab läbipaine  $w$  olema pidev;
2. kahe elemendi piiril peab läbipainde gradient  $\nabla v$  olema pidev.

Seda nõuet on raske täita [Zin77] ja seetõttu kasutatakse mittekooskõlalisi elemente. Nende kasutamine on õigustatud, kui elemendid rahuldavad mitmeid mudelteste. Neist kõige olulisem on lapitest (*patchtest*) [Cook95, lk. 88, 110].

## 5 Jäikusmaatriksi $\mathbf{K}$ ja koormuse vektori $\mathbf{f}_l$ leidmine lokaalselt

Ilmneb, et plaadi jäikusmaatriksi  $\mathbf{K}$  ja koormuse vektori  $f_l$  võib leida lokaalselt st. integreerides vaid üle teatud elementide. Olgu  $I_i$  elementide indeksite hulk, mis sisaldavad endast tingimusega  $i$  seotud sõlmi. Ülejäänud elementide hulgas  $\overline{I_i}$  on kujufunktsioon  $N_i$  vastavalt definitsioonile konstantselt 0, järelikult on seda ka  $\nabla N_i$  ja maatriksi  $\mathbf{B}$   $i$ -s veerg  $\mathbf{B}^i$ . Jäikusmaatriksi elemendi  $K_{ij}$  võib vastavalt valemile (2.22) kirjutada

$$K_{ij} = \sum_{\beta \in I_i \cap I_j} \int_{\Omega_\beta} \frac{t^3}{12} \mathbf{B}^{iT} \mathbf{D} \mathbf{B}^j dS + \sum_{\beta \in \overline{I_i} \cap I_j} \int_{\Omega_\beta} \frac{t^3}{12} \mathbf{B}^{iT} \mathbf{D} \mathbf{B}^j dS,$$

kus  $\Omega_\beta$  on elemendi  $\beta$  pind. Kui  $\beta \notin I_i \cap I_j$ , siis  $\mathbf{B}^i$  või  $\mathbf{B}^j$  on piirkonnas  $\Omega_\beta$  konstantselt nullid, seega saab valem kuju

$$K_{ij} = \sum_{\beta \in I_i \cap I_j} \int_{\Omega_\beta} \frac{t^3}{12} \mathbf{B}^{iT} \mathbf{D} \mathbf{B}^j dS. \quad (2.27)$$

Toome sisse elemendi laiendatud kujufunktsioonide vektori  $\mathbf{N}_\beta^{ee}$ , milles  $i$  komponent on  $N_i$ , kui tingimusega  $i$  seotud sõlm on elemendis, ja 0 vastasel korral. Analoogselt valemitele (2.19) ja (2.17) defineerime

$$\nabla \mathbf{N}_\beta^{ee} = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_1^{ee}}{\partial x} & \frac{\partial N_2^{ee}}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_r^{ee}}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1^{ee}}{\partial y} & \frac{\partial N_2^{ee}}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_r^{ee}}{\partial y} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_\beta^{ee} = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_1^{ee}}{\partial x^2} & \frac{\partial N_2^{ee}}{\partial x^2} & \dots & \frac{\partial N_r^{ee}}{\partial x^2} \\ \frac{\partial N_1^{ee}}{\partial y^2} & \frac{\partial N_2^{ee}}{\partial y^2} & \dots & \frac{\partial N_r^{ee}}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial N_1^{ee}}{\partial x \partial y} & 2 \frac{\partial N_2^{ee}}{\partial x \partial y} & \dots & 2 \frac{\partial N_r^{ee}}{\partial x \partial y} \end{pmatrix}.$$

Lihtne on veenduda, et elemendis  $\beta$  langevad kokku  $\mathbf{N}$  ja  $\mathbf{N}_\beta^{ee}$ ,  $\nabla \mathbf{N}$  ja  $\nabla \mathbf{N}_\beta^{ee}$  ning  $\mathbf{B}$  ja  $\mathbf{B}_\beta^{ee}$ . Seega võib valem (2.27) kirjutada kujul

$$K_{ij} = \sum_{\beta \in I_i \cap I_j} \int_{\Omega_\beta} \frac{t^3}{12} \mathbf{B}_\beta^{eeiT} \mathbf{D} \mathbf{B}_\beta^{eej} dS.$$

Laiendatud elemendi jäikusmaatriksi  $\mathbf{K}_\beta^{ee}$ , mis on defineeritud analoogselt valemiga (2.22)

$$\mathbf{K}_\beta^{ee} = \int_{\Omega_\beta} \frac{t^3}{12} \mathbf{B}_\beta^{eeT} \mathbf{D} \mathbf{B}_\beta^{ee} dS, \quad (2.28)$$

ainsad nullist erinevad komponendid  $K_{\beta ij}^{ee}$  on need, milles on tingimustega  $i$  ja  $j$  seotud sõlmed on elemendis  $\beta$ . Seega vastavalt valemile (2.27) kehtib maatriksvõrdus

$$\mathbf{K} = \sum_{\beta} \mathbf{K}_\beta^{ee}. \quad (2.29)$$

Et muuta arvutusi veelgi efektiivsemaks, kasutatakse vaid elemendi kujufunktsioone (2.12) ja analoogselt valemitele (2.19) ja (2.17) defineeritud  $\nabla \mathbf{N}_\beta^e$  ja  $\mathbf{B}_\beta^e$

$$\nabla \mathbf{N}_\beta^e = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_1^e}{\partial x_e} & \frac{\partial N_2^e}{\partial x_e} & \cdots & \frac{\partial N_r^e}{\partial x_e} \\ \frac{\partial N_1^e}{\partial y} & \frac{\partial N_2^e}{\partial y} & \cdots & \frac{\partial N_r^e}{\partial y} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_\beta^e = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_1^e}{\partial x_e^2} & \frac{\partial N_2^e}{\partial x_e^2} & \cdots & \frac{\partial N_r^e}{\partial x_e^2} \\ \frac{\partial N_1^e}{\partial y^2} & \frac{\partial N_2^e}{\partial y^2} & \cdots & \frac{\partial N_r^e}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial N_1^e}{\partial x \partial y} & 2 \frac{\partial N_2^e}{\partial x \partial y} & \cdots & 2 \frac{\partial N_r^e}{\partial x \partial y} \end{pmatrix}.$$

Kuna maatriksi  $\mathbf{K}_\beta^{ee}$  enamik elemente on nullid, siis on ebaratsionaalne seda arvutada, selle asemel arvutatakse kompaktna elemendi jääkusmaatriks

$$\mathbf{K}_\beta^e = \int_{\Omega_\beta} \frac{t^3}{12} \mathbf{B}_\beta^e \mathbf{D} \mathbf{B}_\beta^e dS. \quad (2.30)$$

Maatriksit  $\mathbf{B}$  on lihtne laiendada maatriksiks  $\mathbf{K}_\beta^{ee}$  kasutades kahte reeglit:

1. element  $K_{\beta ij}^{ee} = 0$ , kui üks tingimustele  $i$  või  $j$  vastav sõlm pole elemendis;
2. element  $K_{\beta ij}^{ee} = K_{\beta kl}^e$ , kus tingimusele  $i$  vastab elemendi  $\beta$  kujufunktsioon  $N_{\beta k}^e$  ja tingimusele  $j$  vastab  $N_{\beta l}^e$ .

Praktikas on tarvis meeles pidada, vaid iga elemendi lokaalsele nummerdusele vastavat globaalset nummerdust ja laiendusmaatriksit otseselt välja arvutamata võib leida selle vastavalt valemile (2.29). See vähendab vaja mineva arvuti mälumahu kasutamist miinimumini ja kui sõlmed on hästi nummerdatud on tulemuseks hõre lintmaatriks, mida on kerge pöörata.

Analoogiliselt jääkusmaatriksiga  $\mathbf{K}$ , saab koormuse vektori  $\mathbf{f}_i$  elemendi avaldada summamana

$$f_i = \sum_{\beta \in I_i} \int_{\Omega_\beta} N_i q dS, \quad (2.31)$$

sest ülejäänud integraalide väärtus on null analoogselt valemi (2.27) põhjendusega. Samamoodi saab defineerida laiendatud elemendi koormuse vektori

$$\mathbf{f}_\beta^{ee} = \int_{\Omega} \mathbf{N}_\beta^{eeT} q dS \quad (2.32)$$

ja analoogselt on põhjendatav valem

$$\mathbf{f}_i = \sum_{\beta} \mathbf{f}_\beta^{ee}. \quad (2.33)$$

Arvutuste kompaksemaks muutmiseks tuuakse sisse elemendi koormuse vektor

$$\mathbf{f}_\beta^e = \int_{\Omega_\beta} \mathbf{N}_\beta^{eT} q dS, \quad (2.34)$$

mida saab laiendada  $\mathbf{f}_\beta^e$  analoogse laienduseeskirja abil.

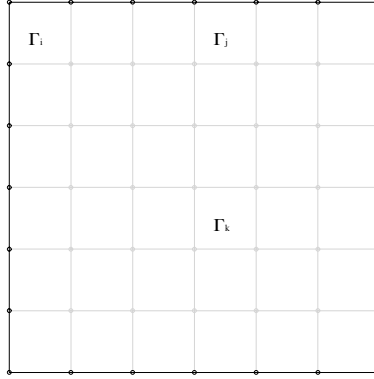
Nüüd on meil maatriksi  $\mathbf{K}$  ja vektori  $\mathbf{f}_i$  arvutamine taandatud integreerimisele elementides. See ei säästa meid üksnes kujufunktsioonide tildistamisest vaid lihtsustab ka integreerimist. Iga elemendi tüübiga saab siduda sobiva šablooniga ja teisenduse šabloonist elementi, see võimaldab omakorda taandada integreerimise üle elemendi integreerimiseks üle šablooniga. Viimast on palju lihtsam formaliseerida, aga sellest tuleb lähemalt juttu neljandas peatükis.

## 6 Rajajõudude vektori $\mathbf{f}_b$ arvutamine lokaalselt

Rajajõudude vektori arvutamise taandamine integreerimiseks konkreetsetes elementides käib põhimõtteliselt samamoodi. Siiski kerkib ülesse olulisi tehnilisi erinevusi, mistõttu käsitleme rajajõudude vektori arvutamist eraldi. Rajajõudude vektor  $\mathbf{f}_b$  avaldub vastavalt valemile (2.23) kujul

$$\mathbf{f}_b = \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T \left( Q_{nz} + \frac{\partial M_{nm}}{\partial m} \right) dl - \int_{\Gamma} (\nabla \mathbf{N})^T \mathbf{n} M_{nm} dl, \quad (2.35)$$

kus vektor  $\mathbf{n}$  on välisnormaali suunaline ühikvektor ja  $\mathbf{m}$  on raja  $\Gamma$  puutujasihiline ühikvektor, mis on integreerimise suunas.



Joonis 10: Plaadi ja elementide rajad.

Jagame plaadi raja  $\Gamma$  vastavalt plaadi elementideks jaotusele osadeks. Elementidele  $\beta$  kuuluvat plaadi rajaosa tähistame  $\Gamma_\beta$  st.  $\Gamma_\beta$  on elemendi raja ühisosa plaadi enda rajaga  $\Gamma$ . Joonisel on see rajaosa märgitud tumedalt. Olgu plaadi rajaga ühisosa omavate elementide indeksite hulk  $I_\Gamma$  st.

$$I_\Gamma = \{\beta \mid \Gamma_\beta \neq \emptyset\}.$$

Rajajõudude vektori arvutamise saab taandada elemendi sisesele integreerimisele. Tähistame suurusega  $\mathbf{f}_{b\beta}^{ee}$  integraali

$$\mathbf{f}_{b\beta}^{ee} = \int_{\Gamma_\beta} \mathbf{N}_\beta^{eeT} \left( Q_{nz} + \frac{\partial M_{nm}}{\partial m} \right) dl - \int_{\Gamma_\beta} (\nabla \mathbf{N}_\beta^{ee})^T \mathbf{n} M_{nm} dl, \quad (2.36)$$

kus integreerimine üle  $\Gamma_\beta$  toimub samas suunas kui rajal  $\Gamma$  st. vastupäeva. Integraali aditiivsuse ja vektorite  $\mathbf{N}$  ja  $\mathbf{N}_\beta^{ee}$  ja maatriksite  $\nabla \mathbf{N}$  ja  $\nabla \mathbf{N}_\beta^{ee}$  kokkulangemise tõttu elemendis  $\beta$  kehtib valem

$$\mathbf{f}_b = \sum_{\beta \in I} \mathbf{f}_{b\beta}^{ee}. \quad (2.37)$$

Defineefime rajajõudude vektori elemendis järgnevalt<sup>9</sup>

$$\mathbf{f}_{\mathbf{b}_\beta}^e = \int_{\Gamma_\beta} \mathbf{N}_\beta^{eT} \left( Q_{nz} + \frac{\partial M_{nm}}{\partial m} \right) dl - \int_{\Gamma_\beta} (\nabla \mathbf{N}_\beta^e)^T \mathbf{n} M_{nn} dl. \quad (2.38)$$

Rajajõudude vektori  $\mathbf{f}_{\mathbf{b}_\beta}^e$  laiendamine vektoriks  $\mathbf{f}_{\mathbf{b}_\beta}^{ee}$  toimub täpselt samamoodi kui maatrikisi  $\mathbf{K}^e$  ja vektori  $\mathbf{f}_1$  laiendamine. Sõltuvalt rajatingimustest võivad mõningad vektori  $\mathbf{f}_{\mathbf{b}_\beta}^{ee}$  komponendid olla arvutamatud. Seda käsitleme pikemalt neljandas peatükis.

---

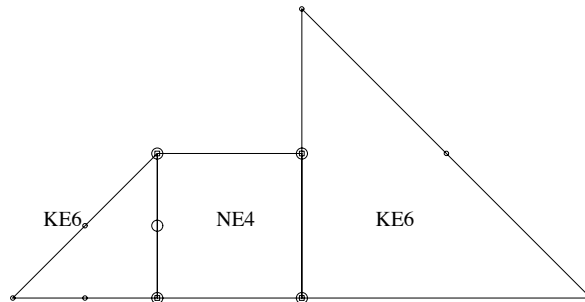
<sup>9</sup>Metoodiliselt oleks õigem see defineerida kui integraal üle kogu elemendi raja, kuid praktilistest kaalutlustest lähtuvalt on mõistlik defineerida see vaid üle rajaosa  $\Gamma_\beta$ . See tingib tühiste erinevuse võrreldes raamatuga [OttPet92].

# III peatükk

## Kasutatavad elemendid

### 1 Elementide aproksimatsioon ja kooskõla

Järgnevas käsitleme kaht tuntud mittekooskõlalist elementi: kuue sõlmega kolmnurkelementi(KE6) ja nelja sõlmega nelinurkelementi(NE4). Lisaks nendele käsitleme tingimuste ühtsuse saavutamiseks kaheksasõlmelist nelinurkelementi(NE8) paaris kuue sõlmelise kolmnurkelemendiga ja neljasõlmelist kolmnurkelementi(KE4) paaris neljasõlmelise nelinurkelemendiga. Nii väldime olukordi kus sõlmedes on antud eri arv või eri tüüpi tingimused.



Joonis 11: Suurendatud sõlmedes on ebakõlad. NE4 elemendil on igas sõlmes kolm tingimust KE6 ainult üks tingimus.

Lõplike elementide meetodi korral aproksimeeritakse otsitavat lahendit polünoomiga kujul (2.10). Vastavalt täielikuse nõudele peab see sisaldama kõiki esimese ja teise astme monoome ning vabaliiget, ülejäänud liikmete valimiseks on meil palju võimalusi. Kuna pole põhjust eelistada  $x$ - või  $y$ -telge, siis valime lisaliikmed nii, et saadav polünoom oleks sümmeetriline  $x$  ja  $y$  suhtes. Teiseks lisaliikmete valimise põhimõtteks on valida nii vähe parasiitliikmeid kui võimalik.

Kui meil on aproksimatsioon  $w$ , siis võib rääkida aproksimatsiooni jär gust. Kui aproksimatsioon  $w$  sisaldab endas kõik monoomid, mille aste on väiksem võrdne kui  $k$  ja  $k$  on maksimaalne, siis aproksimatsiooni järk  $k$ . Intuitiivselt on selge, et kasutades  $k$ -ndat järku aproksimatsiooniga elemente on lõplike elementide meetodi koondumiskiirus ülimalt  $O(h^{k+1})$ , sest olenemata tingimustevektori  $\mathbf{a}$  valikust elemendi sees on tegeliku lahendi ja aproksimatsiooni erinevus vastavalt Taylori reaks arendusele<sup>10</sup> vähemalt  $O(h^{k+1})$ . Liikmeid, mille aste on kõrgem kui aproksimatsiooni järk, nimetatakse parasiitliikmeteks, sest need liikmed suurendavad vaid arvutuste mahtu, toomata kaasa täpsuse tõusu. Vahel on neid siiski mõtet kasutada, et saavutada sõlmede sümmeetria. Käsitlevatest

<sup>10</sup>See realiseerub parajasti siis, kui elemendi aproksimatsioon langeb kokku lahendi Taylori arendisega mõne elemendi sees oleva punkti suhtes.

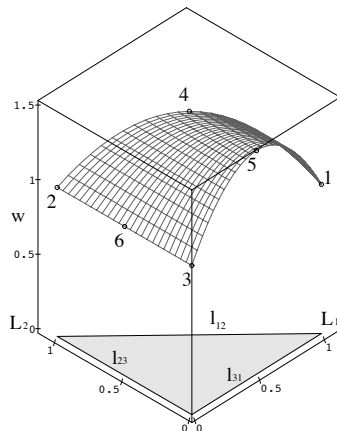
elementidest on teist järku aproksimatsiooniga KE6 ja RE8 element; kolmandat järku aproksimatsiooniga KE4 ja NE4 element.

Aproksimatsiooni ja kujufunktsioonide leidmiseks kasutame lokaalseid koordinaate, see võimaldab üht tüüpi elementide korral kasutada ühesugust elemendi šabloonit. See omakorda lihtsustab nii kujufunktsioonide arvutamist kui integreerimist. Enamasti tekib vastuolu esialgselt elemendile määratud ja teisendusest tuleneva aproksimatsioonitüübi vahel. Seda võib ignoreerida, sest lokaalsest teljestikust globaalsesse viiv teisendus on enamasti lineaarne, seega minnes lokaalsest teljestikust üle globaalsesse muutuvad vaid monoomide kordajad ja aproksimatsiooni järk säilib. Arvutused muutuvad seevastu lihtsamaks. Kui teisendus pole lineaarne, siis tekivad küll suuremad moonutused, aga praktikas püütakse valida tükeldus nii, et elemendi kuju on küllalt ligilähedane ristkülik või kolmnurksele elemendile, mille teisendused on lineaarsed.

Mida ebakorrapärasem on element, seda halvem on reeglina saadav ligikaudne lahend. Üks põhjus on siin teisenduse mittelineaarsus, teine olulisem põhjus on ligikaudsest integreerimisest tulenev viga, mida käsitleme edaspidi.

## 2 Kuue sõlmega kolmnurkelement

Esimesena soovitas seda elementi Morley[Mor71] 1971 aastal. Tippudes 1,2,3 saab anda ette läbipainde  $w$ , samas külgede keskpunktides 4,5,6 saab ette anda läbipainde välisnormaali suunalise kalde  $\frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}}$ .



Joonis 12: Näide kuuesõlmelisest kolmnurkelemendist.

Läbipainde aproksimatsioon on vähima võimaliku arvu liikmetega

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2. \quad (3.1)$$

Element ei ole kooskõlaline. Kooskõlaks on tarvilik ja piisav aproksimatsioon  $w$  ja osatuletise  $\frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}}$  ühene määratlus konkreetse küljega seotud rajatingimustest, sest andes küljel ette  $w$  oleme ette andnud ka puutujasihilise osatuletise  $\frac{\partial w}{\partial \mathbf{m}}$ . Paar  $\frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}}$  ja  $\frac{\partial w}{\partial \mathbf{m}}$  määrab üheselt ära gradiendi  $\nabla w$ . Kui küljega seotud rajatingimused ei määra üheselt ära läbipainet ja selle gradienti, siis on ülejäänud tingimusi varieerides võimalik konstrueerida kahest elemendist koosnev süsteem, mis pole kooskõlaline.

Elemendi küljel saab aproksimatsiooni  $w$  parametrizeerida ühemuutuja polünoomiks, kasutades sirge parameetrilisi võrrandeid

$$x = x_0 + c_1 t, \quad y = y_0 + c_2 t. \quad (3.2)$$

Tulemuseks on teise astme polünoom. Osatuletis  $\frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}}$  taandub rajal esimese astme polünoomiks. Seega on rajal kokku tarvis fikseerida viis konstanti, milleks on vaid kolm tingimust: aproksimatsiooni  $w$  väärtused külje otstes ja osatuletise  $\frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}}$  väärtus külje keskel. See ei ole piisav ja seega pole element kooskõlaline. Aproksimatsiooni leidmisel lähme üle pindalakoordinaatidele. Pindalakoordinaadid on punkti  $P = (x_p, y_p)$  poolt indutseeritud kolme kolmurga pindalade suhted elemendi enda pindalasse. Kasutades vektorkorrutise arvutamise reeglit, saab



kolmnurga pindala avaldada<sup>11</sup>

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Analoogiliselt avalduvad väikeste kolmnurkade pindalad

$$A_1 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_p & y_p \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \quad A_2 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_p & y_p \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \quad A_3 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_p & y_p \end{vmatrix}$$

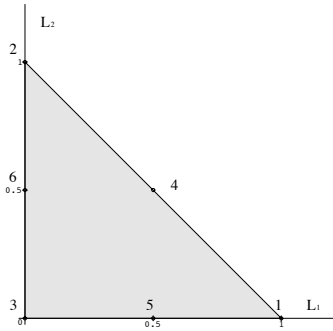
ja nendele vastavad pindalakoordinaadid

$$\mathcal{L}_1 = \frac{A_1}{A}, \quad \mathcal{L}_2 = \frac{A_2}{A}, \quad \mathcal{L}_3 = \frac{A_3}{A}. \quad (3.3)$$

Koordinaatide definitsioonist tulenevalt on koordinaadid lineaarselt sõltuvad

$$\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3 = 1. \quad (3.4)$$

Võtame pindalakoordinaatidest kasutusele  $\mathcal{L}_1$  ja  $\mathcal{L}_2$ .



Joonis 13: Kuuesõlmelise elemendi šabloon pindalakoordinaatides.

Vastavad üleminekuvalemid ühest koordinaatide süsteemist teise on

$$\mathcal{L}_1 = \frac{1}{2S_{\Delta}} \left( x_2 y_3 - x_3 y_2 + (y_2 - y_3)x_p + (x_3 - x_2)y_p \right) \quad (3.5)$$

$$\mathcal{L}_2 = \frac{1}{2S_{\Delta}} \left( x_3 y_1 - x_1 y_3 + (y_3 - y_1)x_p + (x_1 - x_3)y_p \right)$$

$$\begin{aligned} x_p &= x_3 + (x_1 - x_3)\mathcal{L}_1 + (x_2 - x_3)\mathcal{L}_2 \\ y_p &= y_3 + (y_1 - y_3)\mathcal{L}_1 + (y_2 - y_3)\mathcal{L}_2 \end{aligned} \quad (3.6)$$

<sup>11</sup>Siin ja edaspidi on eeldatud kolmnurga tippude 1, 2 ja 3 vastupäeva paigutust. See lubab loobuda absoluutväärtuse märgist valemis.

Seega sõltuvad pindalakoordinaadid lineaarselt globaalsetest koordinaatidest. Võtame läbipainde aproksimatsiooni lokaalses teljestikus kujul

$$w = \beta_1 + \beta_2 \mathcal{L}_1 + \beta_3 \mathcal{L}_2 + \beta_4 \mathcal{L}_1^2 + \beta_5 \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2 + \beta_6 \mathcal{L}_2^2. \quad (3.7)$$

Kuna meil on tarvis teada välisnormaali suunalist tuletist sõlmedes 4, 5 ja 6, siis uurime kuidas muutuvad pindalakoordinaadid vastavates suundades. Tähistame kolmnurga külgedega seotud vektorid  $\mathbf{l}_{12}$ ,  $\mathbf{l}_{23}$  ja  $\mathbf{l}_{31}$  ning neile vastavad küljepikkused  $l_{12}$ ,  $l_{23}$  ja  $l_{31}$ . Sõlme  $i$  koordinaadid tähistame traditsiooniliselt  $(x_i, y_i)$ . Tähistust arvestades, saame punktides 4, 5 ja 6 välisnormaalid

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_4 &= \frac{1}{l_{12}}(y_2 - y_1, x_1 - x_2), \\ \mathbf{n}_5 &= \frac{1}{l_{31}}(y_1 - y_3, x_3 - x_1), \\ \mathbf{n}_6 &= \frac{1}{l_{23}}(y_3 - y_2, x_2 - x_3). \end{aligned}$$

Et arvutada välisnormaali suunalisi tuletisi, vaatame esmalt kuidas on seotud sirge parameetriselised võrrandid globaalses  $xy$ -teljestikus ja lokaalses  $\mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2$ -teljestikus. Teisenduste (3.5) lineaarsusest järeldub, et sirge võrrandile

$$x = x_0 + a_1 t, \quad y = y_0 + a_2 t$$

vastab sirge võrrand lokaalses teljestikus

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_1^0 + b_1 t, \quad \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_2^0 + b_2 t,$$

kus

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1^0 &= \frac{x_2 y_3 - x_3 y_2 + (y_2 - y_3)x_0 + (x_3 - x_2)y_0}{2S_\Delta}, & b_1 &= \frac{(y_2 - y_3)a_1 + (x_3 - x_2)a_2}{2S_\Delta}, \\ \mathcal{L}_2^0 &= \frac{x_3 y_1 - x_1 y_3 + (y_3 - y_1)x_0 + (x_1 - x_3)y_0}{2S_\Delta}, & b_2 &= \frac{(y_3 - y_1)a_1 + (x_1 - x_3)a_2}{2S_\Delta}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

See annab meile seose osatuletiste vahel globaalses ja lokaalses teljestikus

$$\frac{\partial w(x_0, y_0)}{\partial \mathbf{a}} = (\nabla_{\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2} w(\mathcal{L}_1^0, \mathcal{L}_2^0))^T \mathbf{b}.$$

Sõlmedes 4, 5 ja 6 on gradiendi väärtus

$$\nabla_{\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2} w \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) = \left( \beta_2 + \beta_4 + \frac{\beta_5}{2}, \beta_3 + \beta_6 + \frac{\beta_5}{2} \right)^T, \quad (3.9)$$

$$\nabla_{\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2} w \left( \frac{1}{2}, 0 \right) = \left( \beta_2 + \beta_4, \beta_3 + \frac{\beta_5}{2} \right)^T, \quad (3.10)$$

$$\nabla_{\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2} w \left( 0, \frac{1}{2} \right) = \left( \beta_2 + \frac{\beta_5}{2}, \beta_3 + \beta_6 \right)^T. \quad (3.11)$$

Olgu nüüd sõlmedes 1, 2 ja 3 antud läbipaine  $w_1$ ,  $w_2$  ja  $w_3$ . Sõlmedes 4, 5 ja 6 olgu antud välisnormaali suunaline tuletis  $s_4$ ,  $s_5$  ja  $s_6$ . Normaalidele vastavad

vektorid lokaalses teljestikus on<sup>12</sup> vastavalt seostele (3.8)

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_1^4 &= \frac{(x_1 - x_2)(x_3 - x_2) + (y_1 - y_2)(y_3 - y_2)}{2S_\Delta l_{12}} = -\frac{\mathbf{l}_{12} \cdot \mathbf{l}_{23}}{2S_\Delta l_{12}}, \\
\mathcal{N}_2^4 &= \frac{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1) + (y_2 - y_1)(y_3 - y_1)}{2S_\Delta l_{12}} = \frac{\mathbf{l}_{12} \cdot \mathbf{l}_{13}}{2S_\Delta l_{12}}, \\
\mathcal{N}_1^5 &= \frac{(x_1 - x_3)(x_2 - x_3) + (y_1 - y_3)(y_2 - y_3)}{2S_\Delta l_{13}} = \frac{\mathbf{l}_{13} \cdot \mathbf{l}_{23}}{2S_\Delta l_{13}}, \\
\mathcal{N}_2^5 &= \frac{(x_1 - x_3)(x_3 - x_1) + (y_3 - y_1)(y_1 - y_3)}{2S_\Delta l_{13}} = -\frac{l_{13}}{2S_\Delta}, \\
\mathcal{N}_1^6 &= \frac{(x_3 - x_2)(x_2 - x_3) + (y_3 - y_2)(y_2 - y_3)}{2S_\Delta l_{23}} = -\frac{l_{23}}{2S_\Delta}, \\
\mathcal{N}_2^6 &= \frac{(x_1 - x_3)(x_2 - x_3) + (y_1 - y_3)(y_2 - y_3)}{2S_\Delta l_{23}} = \frac{\mathbf{l}_{13} \cdot \mathbf{l}_{23}}{2S_\Delta l_{23}}.
\end{aligned}$$

Seda arvestades saame võrrandisüsteemi

$$\begin{aligned}
w_1 &= \beta_1 + \beta_2 + \beta_4, \\
w_2 &= \beta_1 + \beta_3 + \beta_6, \\
w_3 &= \beta_1, \\
s_1 &= \mathcal{N}_1^4 \left( \beta_2 + \beta_4 + \frac{\beta_5}{2} \right) + \mathcal{N}_2^4 \left( \beta_3 + \beta_6 + \frac{\beta_5}{2} \right), \\
s_2 &= \mathcal{N}_1^5 (\beta_2 + \beta_4) + \mathcal{N}_2^5 \left( \beta_3 + \frac{\beta_5}{2} \right), \\
s_3 &= \mathcal{N}_1^6 \left( \beta_2 + \frac{\beta_5}{2} \right) + \mathcal{N}_2^6 (\beta_3 + \beta_6).
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Selle võrrandisüsteemi lahend on

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= w_3, \\
\beta_2 &= \left( 1 - \frac{\mathbf{l}_{12} \cdot \mathbf{l}_{13}}{l_{12}^2} \right) w_1 + \left( \frac{\mathbf{l}_{12} \cdot \mathbf{l}_{13}}{l_{12}^2} + \frac{\mathbf{l}_{13} \cdot \mathbf{l}_{23}}{l_{23}^2} \right) w_2 - \left( 1 + \frac{\mathbf{l}_{13} \cdot \mathbf{l}_{23}}{l_{23}^2} \right) w_3 - \frac{2S_\Delta}{l_{12}} s_1 - \frac{2S_\Delta}{l_{23}} s_3, \\
\beta_3 &= \left( 1 - \frac{\mathbf{l}_{12} \cdot \mathbf{l}_{13}}{l_{12}^2} + \frac{\mathbf{l}_{13} \cdot \mathbf{l}_{23}}{l_{13}^2} \right) w_1 + \frac{\mathbf{l}_{12} \cdot \mathbf{l}_{13}}{l_{12}^2} w_2 - \left( 1 + \frac{\mathbf{l}_{13} \cdot \mathbf{l}_{23}}{l_{13}^2} \right) w_3 - \frac{2S_\Delta}{l_{12}} s_1 - \frac{2S_\Delta}{l_{13}} s_2, \\
\beta_4 &= \frac{\mathbf{l}_{12} \cdot \mathbf{l}_{13}}{l_{12}^2} w_1 - \left( \frac{\mathbf{l}_{12} \cdot \mathbf{l}_{13}}{l_{12}^2} + \frac{\mathbf{l}_{13} \cdot \mathbf{l}_{23}}{l_{23}^2} \right) w_2 + \frac{\mathbf{l}_{13} \cdot \mathbf{l}_{23}}{l_{23}^2} w_3 + \frac{2S_\Delta}{l_{12}} s_1 + \frac{2S_\Delta}{l_{23}} s_3, \\
\beta_5 &= 2 \left( \frac{\mathbf{l}_{12} \cdot \mathbf{l}_{13}}{l_{12}^2} - 1 \right) w_1 - 2 \frac{\mathbf{l}_{12} \cdot \mathbf{l}_{13}}{l_{12}^2} w_2 + 2w_3 + \frac{4S_\Delta}{l_{12}} s_1, \\
\beta_6 &= \left( \frac{\mathbf{l}_{12} \cdot \mathbf{l}_{13}}{l_{12}^2} - \frac{\mathbf{l}_{13} \cdot \mathbf{l}_{23}}{l_{13}^2} - 1 \right) w_1 + \left( 1 - \frac{\mathbf{l}_{12} \cdot \mathbf{l}_{13}}{l_{12}^2} \right) w_2 + \frac{\mathbf{l}_{13} \cdot \mathbf{l}_{23}}{l_{13}^2} w_3 + \frac{2S_\Delta}{l_{12}} s_1 + \frac{2S_\Delta}{l_{13}} s_2.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

<sup>12</sup>Siin on lihtsuse ja selguse tõttu mõttekas loobuda kahe vektori  $\mathbf{a}$  ja  $\mathbf{b}$  skalaarkorrutise tähistamisest  $\mathbf{a}^T \mathbf{b}$  ja kasutada selle asemel  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ .

Vastavalt kujufunktsioonide definitsioonile (2.12) avalduvad kujufunktsioonid

$$\begin{aligned}
N_1 &= \left(1 - \frac{\mathbf{l}_{12} \cdot \mathbf{l}_{13}}{l_{12}^2}\right) \mathcal{L}_1 + \left(1 - \frac{\mathbf{l}_{12} \cdot \mathbf{l}_{13}}{l_{12}^2} + \frac{\mathbf{l}_{13} \cdot \mathbf{l}_{23}}{l_{13}^2}\right) \mathcal{L}_2, \\
&\quad + \frac{\mathbf{l}_{12} \cdot \mathbf{l}_{13}}{l_{12}^2} \mathcal{L}_1^2 + 2 \left(\frac{\mathbf{l}_{12} \cdot \mathbf{l}_{13}}{l_{12}^2} - 1\right) \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2 + \left(\frac{\mathbf{l}_{12} \cdot \mathbf{l}_{13}}{l_{12}^2} - \frac{\mathbf{l}_{13} \cdot \mathbf{l}_{23}}{l_{13}^2} - 1\right) \mathcal{L}_2^2 \\
N_2 &= \left(\frac{\mathbf{l}_{12} \cdot \mathbf{l}_{13}}{l_{12}^2} + \frac{\mathbf{l}_{13} \cdot \mathbf{l}_{23}}{l_{23}^2}\right) \mathcal{L}_1 + \frac{\mathbf{l}_{12} \cdot \mathbf{l}_{13}}{l_{12}^2} \mathcal{L}_2 + \\
&\quad - \left(\frac{\mathbf{l}_{12} \cdot \mathbf{l}_{13}}{l_{12}^2} + \frac{\mathbf{l}_{13} \cdot \mathbf{l}_{23}}{l_{23}^2}\right) \mathcal{L}_1^2 - 2 \frac{\mathbf{l}_{12} \cdot \mathbf{l}_{13}}{l_{12}^2} \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2 + \left(1 - \frac{\mathbf{l}_{12} \cdot \mathbf{l}_{13}}{l_{12}^2}\right) \mathcal{L}_2^2, \\
N_3 &= 1 - \left(1 + \frac{\mathbf{l}_{13} \cdot \mathbf{l}_{23}}{l_{23}^2}\right) \mathcal{L}_1 - \left(1 + \frac{\mathbf{l}_{13} \cdot \mathbf{l}_{23}}{l_{13}^2}\right) \mathcal{L}_2 \\
&\quad + \frac{\mathbf{l}_{13} \cdot \mathbf{l}_{23}}{l_{23}^2} \mathcal{L}_1^2 + 2 \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2 + \frac{\mathbf{l}_{13} \cdot \mathbf{l}_{23}}{l_{13}^2} \mathcal{L}_2^2, \\
N_4 &= \frac{2S_\Delta}{l_{12}} \left(-\mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_1^2 + 2\mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_2^2\right), \\
N_5 &= \frac{2S_\Delta}{l_{13}} \left(-\mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_2^2\right), \\
N_6 &= \frac{2S_\Delta}{l_{23}} \left(-\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_1^2\right).
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Kasutades lihtsailt tuletatavaid geomeetrilisi seoseid

$$\frac{\mathbf{l}_{31} \cdot \mathbf{l}_{32}}{l_{13}^2} + \frac{\mathbf{l}_{13} \cdot \mathbf{l}_{12}}{l_{13}^2} = 1, \quad \frac{\mathbf{l}_{12} \cdot \mathbf{l}_{13}}{l_{12}^2} + \frac{\mathbf{l}_{21} \cdot \mathbf{l}_{23}}{l_{12}^2} = 1, \quad \frac{\mathbf{l}_{31} \cdot \mathbf{l}_{32}}{l_{23}^2} + \frac{\mathbf{l}_{21} \cdot \mathbf{l}_{23}}{l_{23}^2} = 1$$

ja pindalakoordinaatide  $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$  ja  $\mathcal{L}_3$  omavahelist seotust (3.4) saame kujufunktsioonid avaldada sümmeetrilisel kujul

$$\begin{aligned}
N_1 &= \mathcal{L}_1 + \frac{\mathbf{l}_{31} \cdot \mathbf{l}_{21}}{l_{13}^2} \mathcal{L}_2 (\mathcal{L}_2 - 1) + \frac{\mathbf{l}_{21} \cdot \mathbf{l}_{31}}{l_{12}^2} \mathcal{L}_3 (\mathcal{L}_3 - 1) + 2\mathcal{L}_2 \mathcal{L}_3, \\
N_2 &= \mathcal{L}_2 + \frac{\mathbf{l}_{12} \cdot \mathbf{l}_{32}}{l_{23}^2} \mathcal{L}_1 (\mathcal{L}_1 - 1) + \frac{\mathbf{l}_{12} \cdot \mathbf{l}_{32}}{l_{12}^2} \mathcal{L}_3 (\mathcal{L}_3 - 1) + 2\mathcal{L}_1 \mathcal{L}_3, \\
N_3 &= \mathcal{L}_3 + \frac{\mathbf{l}_{13} \cdot \mathbf{l}_{23}}{l_{23}^2} \mathcal{L}_1 (\mathcal{L}_1 - 1) + \frac{\mathbf{l}_{13} \cdot \mathbf{l}_{23}}{l_{13}^2} \mathcal{L}_2 (\mathcal{L}_2 - 1) + 2\mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2, \\
N_4 &= \frac{2S_\Delta}{l_{12}} \mathcal{L}_3 (\mathcal{L}_3 - 1), \\
N_5 &= \frac{2S_\Delta}{l_{13}} \mathcal{L}_2 (\mathcal{L}_2 - 1), \\
N_6 &= \frac{2S_\Delta}{l_{23}} \mathcal{L}_1 (\mathcal{L}_1 - 1).
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Lõplike elementide rakendamiseks on meil tarvis avaldada maatriksid  $\nabla \mathbf{N}$  ja  $\mathbf{B}$ . Et seda teha võimalikult ökonoomselt, avaldame maatriksid lokaalses teljestikus. Järgimises peatükis pühendame ühe osa lokaalses ja globaalses teljestikus olevate maatriksite vahekorra selgitamiseks. Lokaalses teljestikus avalduvad

maatriksi  $\nabla \mathbf{N}$  elemendid:

$$\begin{aligned}
\nabla N_{1,1} &= (2\mathcal{L}_1 + 2\mathcal{L}_2 - 1)c_1 - 2\mathcal{L}_2 + 1, \\
\nabla N_{2,1} &= c_0(2\mathcal{L}_2 - 1) + (2\mathcal{L}_1 + 2\mathcal{L}_2 - 1)c_1 - 4\mathcal{L}_2 + 2 - 2\mathcal{L}_1, \\
\nabla N_{1,2} &= (2\mathcal{L}_1 - 1)c_2 + (2\mathcal{L}_1 + 2\mathcal{L}_2 - 1)c_3 + 2 - 4\mathcal{L}_1 - 2\mathcal{L}_2, \\
\nabla N_{2,2} &= (2\mathcal{L}_1 + 2\mathcal{L}_2 - 1)c_3 + 1 - 2\mathcal{L}_1, \\
\nabla N_{1,3} &= (2\mathcal{L}_1 - 1)c_4 + 2\mathcal{L}_2 - 1, \\
\nabla N_{2,3} &= (2\mathcal{L}_2 - 1)c_5 + 2\mathcal{L}_1 - 1, \\
\nabla N_{1,4} &= c_6(2\mathcal{L}_1 + 2\mathcal{L}_2 - 1), \\
\nabla N_{2,4} &= c_6(2\mathcal{L}_1 + 2\mathcal{L}_2 - 1), \\
\nabla N_{1,5} &= 0, \\
\nabla N_{2,5} &= c_7(2\mathcal{L}_2 - 1), \\
\nabla N_{1,6} &= c_8(2\mathcal{L}_1 - 1), \\
\nabla N_{2,6} &= 0,
\end{aligned}$$

kus kordajad  $c_i$  on saadud valemite (3.15) liidetavate ees olevate kordajate tähistamisest:

$$\begin{aligned}
c_0 &= \frac{\mathbf{l}_{31} \cdot \mathbf{l}_{21}}{l_{13}^2}, & c_1 &= \frac{\mathbf{l}_{21} \cdot \mathbf{l}_{31}}{l_{12}^2}, & c_2 &= \frac{\mathbf{l}_{12} \cdot \mathbf{l}_{32}}{l_{23}^2}, \\
c_3 &= \frac{\mathbf{l}_{12} \cdot \mathbf{l}_{32}}{l_{12}^2}, & c_4 &= \frac{\mathbf{l}_{13} \cdot \mathbf{l}_{23}}{l_{23}^2}, & c_5 &= \frac{\mathbf{l}_{13} \cdot \mathbf{l}_{23}}{l_{13}^2}, \\
c_6 &= \frac{2S_{\Delta}}{l_{12}}, & c_7 &= \frac{2S_{\Delta}}{l_{13}}, & c_8 &= \frac{2S_{\Delta}}{l_{23}}.
\end{aligned}$$

Tuues sisse tähised

$$a_1 = 2\mathcal{L}_1 + 2\mathcal{L}_2 - 1, \quad a_2 = 2\mathcal{L}_1 - 1, \quad a_3 = 2\mathcal{L}_2 - 1$$

võrrandites esinevate korduvate liikmete jaoks, saab maatriksile anda kompaktsema kuju

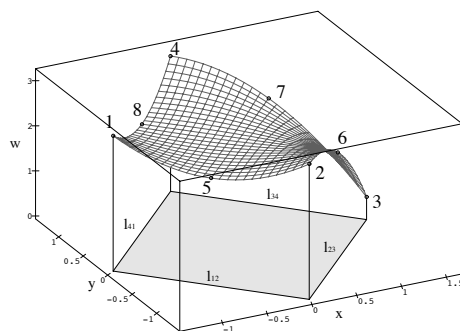
$$\begin{aligned}
\nabla N_{1,1} &= a_1 c_1 - a_3, & \nabla N_{1,2} &= a_3 c_0 + a_1 c_1 + 2(1 - \mathcal{L}_1 - 2\mathcal{L}_2), \\
\nabla N_{2,1} &= a_2 c_2 + a_1 c_3 + 2(1 - 2\mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_2), & \nabla N_{2,2} &= a_1 c_3 + a_2, \\
\nabla N_{3,1} &= a_2 c_4 + a_3, & \nabla N_{4,1} &= a_1 c_6, & \nabla N_{5,1} &= 0, & \nabla N_{6,1} &= a_2 c_8, \\
\nabla N_{3,2} &= a_3 c_5 + a_2, & \nabla N_{5,2} &= a_1 c_6, & \nabla N_{5,2} &= a_3 c_7, & \nabla N_{6,2} &= 0.
\end{aligned}$$

Maatriks  $\mathbf{B}$  on konstantne maatriks elementidega

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2c_1 & 2c_2 + 2c_3 - 4 & 2c_4 & 2c_6 & 0 & 2c_8 \\ 2c_0 + 2c_1 - 4 & 2c_3 & 2c_5 & 2c_6 & 2c_7 & 0 \\ 4c_1 - 4 & 4c_3 - 4 & 4 & 4c_6 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

### 3 Kaheksa sõlmega ristkülikelement

Selle elemendi kasutamine on tingitud eelkõige kokkusobivusest kuue sõlmega kolmnurkelemendiga. Sõlmedes 1,2,3 ja 4 saab ette anda läbipainde  $w$  ja sõlmedes 5,6,7 ja 8 saab ette anda läbipainde välisnormaali suunalise tuletise  $\frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}}$ .



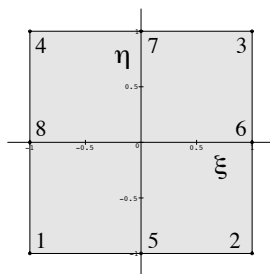
Joonis 14: Näide kaheksasõlmelisest ristkülikelemendist.

Võrreldes kuuesõlmelise elemendiga tuleb aproksimatsiooni juurde 2 parasiitliiget ja aproksimatsioon on kujul

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^2 y + \alpha_8 xy^2. \quad (3.16)$$

Samadel põhjustel, mis kuuesõlmelise kolmnurkelemendi korralgi pole element koosõlaline.

Vaatame esmalt spetsiifilist erijuhtu. Olgu meil  $\xi\eta$ -koordinaattelgedes ruudukujuline element nagu joonisel.



Joonis 15: Kaheksasõlmelise ristkülikelemendi šabloon.

Leiame antud erijuhu tarvis kujufunktsioonid ja üldistame hiljem tulemust. Läbipainde osatuletised avalduvad kujul

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial \xi} &= \alpha_2 + 2\alpha_4\xi + \alpha_5\eta + 2\alpha_7\xi\eta + \alpha_8\eta^2, \\ \frac{\partial w}{\partial \eta} &= \alpha_3 + \alpha_5\xi + 2\alpha_6\eta + a7\xi^2 + 2\alpha_8\xi\eta.\end{aligned}$$

Võttes arvesse normaalide suundadest tekkivaid märgierinevusi, saame võrrandisüsteemi

$$\begin{aligned}w_1 &= \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 - \alpha_7 - \alpha_8, \\ w_2 &= \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 - \alpha_5 + \alpha_6 - \alpha_7 + \alpha_8, \\ w_3 &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_8, \\ w_4 &= \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 - \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 - \alpha_8, \\ s_1 &= -\alpha_3 + 2\alpha_6, \\ s_2 &= \alpha_2 + 2\alpha_4, \\ s_3 &= \alpha_3 + 2\alpha_6, \\ s_4 &= -\alpha_2 + 2\alpha_4.\end{aligned}$$

Tähistame järgnevalt võrrandisüsteemi maatriksi  $\mathbf{C}$  ning antud tingimuste vektori  $\mathbf{a}^e = (w_1 \ w_2 \ \dots \ s_4)$  ja polünoomide reavektori  $\mathbf{p} = (1 \ \xi \ \dots \ \xi\eta^2)$ . Kujufunktsioonid tulevad vastavalt valemile (2.12)

$$\begin{aligned}N_1 &= \frac{1}{4} + \frac{\xi\eta(1-\xi-\eta)}{4}, & N_5 &= \frac{\eta^2-1}{4} + \frac{\eta(\xi^2-1)}{2}, \\ N_2 &= \frac{1}{4} + \frac{\xi\eta(\eta-\xi-1)}{4}, & N_6 &= \frac{\xi^2-1}{4} + \frac{\xi(1-\eta^2)}{2}, \\ N_3 &= \frac{1}{4} + \frac{\xi\eta(1+\xi+\eta)}{4}, & N_7 &= \frac{\eta^2-1}{4} + \frac{\eta(1-\xi^2)}{2}, \\ N_4 &= \frac{1}{4} + \frac{\xi\eta(\xi-\eta-1)}{4}, & N_8 &= \frac{\xi^2-1}{4} + \frac{\xi(\eta^2-1)}{2}.\end{aligned}$$

Üldistame antud tulemuse suvalisele ristkülikelemendile, selleks võtame koordinaatide üleminekuvaletiteks lokaalsest  $\xi\eta$ -teljestikust globaalsesse  $xy$ -teljestikku

$$\begin{aligned}x &= \frac{x_1 + x_3}{2} + \frac{x_2 - x_1}{2}\xi + \frac{x_3 - x_2}{2}\eta, \\ y &= \frac{y_1 + y_3}{2} + \frac{y_2 - y_1}{2}\xi + \frac{y_3 - y_2}{2}\eta.\end{aligned}\tag{3.17}$$

Tuletiste teisendamiseks globaalsest teljestikust lokaalsesse teljestikku tuleb peab kasutama üleminekumaatriksit (4.2). Antud teisenduse korral saame

$$\mathbf{J}^T = \begin{pmatrix} \frac{x_2-x_1}{2} & \frac{y_2-y_1}{2} \\ \frac{x_3-x_2}{2} & \frac{y_3-y_2}{2} \end{pmatrix}.\tag{3.18}$$

Vastavalt tuletise arvutamise reeglitele avaldub läbipainde gradient

$$\nabla_{\xi,\eta} w = \mathbf{J}^T \nabla_{x,y} w.\tag{3.19}$$

Leiame viiendas sõlmes oleva välisnormaali  $\mathbf{n}_5 = \frac{1}{l_{12}}(y_2 - y_1, x_1 - x_2)$  suunalise tuletise

$$\frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}_5} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{y_2 - y_1}{l_{12}} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{x_1 - x_2}{l_{12}} \quad (3.20)$$

Kasututame külgede tähistamiseks kuuesõlmelise elemendiga analoogset tähistust st. meil on vektorid  $\mathbf{l}_{12}, \mathbf{l}_{23}, \mathbf{l}_{34}$  ja  $\mathbf{l}_{41}$  ning punktid  $(x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, 8$ . Et ristküliku küljed on omavahel risti, siis  $\mathbf{l}_{32} \cdot \mathbf{l}_{12} = 0$ . Kui arvestada ristküliku vastupäevalist orientatsiooni, siis saame

$$y_1 - y_2 = x_3 - x_2, \quad x_2 - x_1 = y_3 - y_2$$

ja võrdus (3.20) omandab lihtsama vormi<sup>13</sup>

$$\frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}_5} = -\frac{\partial w}{\partial x} \frac{x_3 - x_2}{l_{12}} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{y_3 - y_2}{l_{23}} = -\frac{2}{l_{23}} \frac{\partial w}{\partial \eta}.$$

Analoogised tulemused on saadavad ka teistes sõlmedes. Tulemuse saab kokku võtta maatriksite abil. Olgu maatriks  $\mathbf{A}$  kujul

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{l_{23}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{l_{23}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{l_{12}}{2} \end{pmatrix}$$

ja olgu plokkdiagonaalmaatriksi  $\mathbf{D}$  diagonaalil ühikmaatriks  $\mathbf{I}_4$  ja  $\mathbf{A}$ , siis saab kordajaid  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_8$  ära määrava võrrandistüsteemi kirjutada maatrikskujul

$$\mathbf{D}\mathbf{a}^e = \mathbf{C}\alpha.$$

Analoogselt valemile (2.12) avalduvad kujufunktsioonid

$$\mathbf{N}' = \mathbf{p}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{D} = \mathbf{N}\mathbf{D}.$$

Seose element haaval lahti kirjutades on tulemuseks

$$N'_i = N_i, \quad i = 1, 2, 3, 4; \quad N'_i = \frac{l_{23}}{2}N_i, \quad i = 5, 7; \quad N'_i = \frac{l_{12}}{2}N_i, \quad i = 6, 8.$$

Nii kuuesõlmelise kolmnurk- kui kaheksasõlmelise nelinurkelemendi korral tekib etteantavate tingimuste kooskõla probleem. Külje keskpunktis antav tuletis on suunatud piki välisnormaali, seega kõrvuti asetsevate elementide korral on need vastasmärgiga. Pole mingit põhjust eelistada ühte elementi teisele, seetõttu tuleb iga elemendiga siduda teiste elementidega kooskõlaline normaali orientatsioon, et vältida vastuolusid. Seda saab teha automaatselt plaadi elementideks jaotamise käigus.

Lisaks on tarvis leida maatriksid  $\nabla\mathbf{N}$  ja  $\mathbf{B}$ . Leiame need maatriksid lokaalses  $\xi\eta$ -teljestikus. Kuna kujufunktsioonid on šabloonfunktsioonide lineaarkombinatsioonid, siis leiame vaid funktsioonidele  $\mathbf{N}$  vastavad maatriksid. Maatriksi  $\nabla\mathbf{N}$

<sup>13</sup>Kuna teisendus oli ortogonaalne, siis säilisid kõik nurgad ning ainus, mis muutus oli skaalerimisfaktor.



elemendid on

$$\begin{aligned}
\nabla N_{1,1} &= -\frac{1}{4}\eta(2\xi + \eta - 1), & \nabla N_{2,1} &= -\frac{1}{4}\xi(\xi + 2\eta - 1), \\
\nabla N_{1,2} &= \frac{1}{4}\eta(\eta - 2\xi - 1), & \nabla N_{2,2} &= \frac{1}{4}\xi(2\eta - \xi - 1), \\
\nabla N_{1,3} &= \frac{1}{4}\eta(2\xi + \eta + 1), & \nabla N_{2,3} &= \frac{1}{4}\xi(\xi + 2\eta + 1), \\
\nabla N_{1,4} &= -\frac{1}{4}\eta(\eta - 2\xi + 1), & \nabla N_{2,4} &= -\frac{1}{4}\xi(2\eta - \xi + 1) \\
\nabla N_{1,5} &= \xi\eta, & \nabla N_{2,5} &= \frac{1}{2}\eta + \frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{2}, \\
\nabla N_{1,6} &= \frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\eta^2, & \nabla N_{2,6} &= -\xi\eta, \\
\nabla N_{1,7} &= -\xi\eta, & \nabla N_{2,7} &= \frac{1}{2}\eta + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\xi^2, \\
\nabla N_{1,8} &= \frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}\eta^2 - \frac{1}{2}, & \nabla N_{2,8} &= \xi\eta.
\end{aligned}$$

Et avaldis oleks kompaktsem ja arvutuslikult efektiivsusem asendame korduvalt esinevad liikmed

$$a_1 = \frac{\xi^2}{4}, \quad a_2 = \frac{\xi\eta}{2}, \quad a_3 = \frac{\eta^2}{4}, \quad b_1 = \frac{\xi}{4}, \quad b_2 = \frac{\eta}{4}.$$

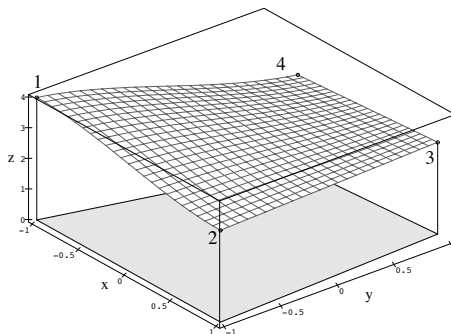
Maatriks  $\mathbf{B}$  avaldub kujul

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\eta & -\frac{1}{2}\eta & \frac{1}{2}\eta & \frac{1}{2}\eta & \eta & \frac{1}{2} & -\eta & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}\xi & \frac{1}{2}\xi & \frac{1}{2}\xi & -\frac{1}{2}\xi & \frac{1}{2} & -\xi & \frac{1}{2} & \xi \\ -\xi - \eta + \frac{1}{2} & \eta - \xi - \frac{1}{2} & \xi + \eta + \frac{1}{2} & \xi - \eta - \frac{1}{2} & 2\xi & -2\eta & -2\xi & 2\eta \end{pmatrix}.$$

See on nii lihtsal kujul, et asendused oluliselt maatriksi arvutamise efektiivsust ei tõsta.

## 4 Nelja sõlme ristkülik- ja nelinurkelement

Esimesena soovitasid seda elementi Adini ja Clough[Ad/Clo61] aastal 1961. Hiljem aastal 1963 soovitas seda elementi kasutada Melosh[Mel63]. Elemendi neljas sõlmes saab anda ette läbipainded  $w$  ja läbipainde osatuletised  $\frac{\partial w}{\partial x}$  ja  $\frac{\partial w}{\partial y}$ .



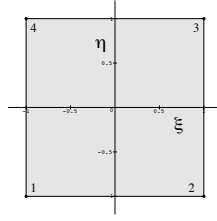
Joonis 16: Näide neljasõlmelisest nelinurkelemendist.

Element on kolmandat järku aproksimatsiooniga, mis sisaldab kahte paraasiitliiget ja avaldub kujul

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} xy^3. \quad (3.21)$$

Element pole kooskõlaline, kuna läbipainde aproksimatsioon elemendi küljel on parametrizeeritav kolmanda astme polünoomiks kui võtta elemendi küljed paralleelselt  $x$ - või  $y$ -teljega (hiljem näeme, et elemendi šabloon on lokaalses teljestikus just selline). Seega on meil läbipainde nelja konstandi määramiseks täpselt neli tingimust: läbipaine ja läbipainde puutujasihiline tuletis elemendi külje otstes ning seega on läbipaine ning läbipainde puutujasihiline tuletis pidev elemendi rajal. Normaalsihiline tuletis taandub samuti kolmanda astme polünoomiks. Erinevalt läbipaindest on meil kasutada vaid kaks tingimust: läbipainde normaalsihilised tuletised külje otstes. Läbipainde väärtused külje otstes ja normaalsihiline tuletis pole kuidagi seotud. Vaatame selle tõestuseks  $y$ -teljega paralleelset külge. Tuletis  $\frac{\partial w}{\partial x}$  ei sõltu konstantidest  $\alpha_0$  ja  $\alpha_3$ , seega muutes vaid  $\alpha_1$  ja  $\alpha_3$  on võimalik saavutada suvalised läbipainded külje otstes. Seega jääb määramata kaks konstanti, mistõttu pole läbipainde normaalsihiline tuletis kahe elemendi rajal pidev.

Aproksimatsiooni leidmisel vaatame esmalt erijuhtu, mida hakkame hiljem kasutama üldisemate elementide šabloonina. Olgu meil  $\xi\eta$ -koordinaattelgedes ruudukujuline element nagu joonisel.



Joonis 17: Neljasõlmelise nelinurkelemendi šabloon.

Läbipainde osatuletised avalduvad kujul

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial \xi} &= \alpha_2 + 2\alpha_4\xi + \alpha_5\eta + 3\alpha_7\xi^2 + 2\alpha_8\xi\eta + \alpha_9\eta^2 + 3\alpha_{11}\xi^2\eta + \alpha_{12}\eta^3, \\ \frac{\partial w}{\partial \eta} &= \alpha_3 + \alpha_5\xi + 2\alpha_6\eta + \alpha_8\xi^2 + 2\alpha_9\xi\eta + 3\alpha_{10}\eta^2 + \alpha_{11}\xi^3 + 3\alpha_{12}\xi\eta^2.\end{aligned}$$

Eelnevad arvestades saame kordajate  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{12}$  määramiseks võrrandisüsteemi

$$\begin{aligned}w_1 &= \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 - \alpha_7 - \alpha_8 - \alpha_9 - \alpha_{10} + \alpha_{11} + \alpha_{12}, \\ w_2 &= \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 - \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 - \alpha_8 + \alpha_9 - \alpha_{10} - \alpha_{11} - \alpha_{12}, \\ w_3 &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_8 + \alpha_9 + \alpha_{10} + \alpha_{11} + \alpha_{12}, \\ w_4 &= \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 - \alpha_5 + \alpha_6 - \alpha_7 + \alpha_8 - \alpha_9 + \alpha_{10} - \alpha_{11} - \alpha_{12},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}s_1 &= \alpha_2 - 2\alpha_4 - \alpha_5 + 3\alpha_7 + 2\alpha_8 + \alpha_9 - 3\alpha_{11} - \alpha_{12}, \\ s_2 &= \alpha_3 - \alpha_5 - 2\alpha_6 + \alpha_8 + 2\alpha_9 + 3\alpha_{10} - \alpha_{11} - 3\alpha_{12}, \\ s_3 &= \alpha_2 + 2\alpha_4 - \alpha_5 + 3\alpha_7 - 2\alpha_8 + \alpha_9 - 3\alpha_{11} - \alpha_{12}, \\ s_4 &= \alpha_3 + \alpha_5 - 2\alpha_6 + \alpha_8 - 2\alpha_9 + 3\alpha_{10} + \alpha_{11} + 3\alpha_{12}, \\ s_5 &= \alpha_2 + 2\alpha_4 + \alpha_5 + 3\alpha_7 + 2\alpha_8 + \alpha_9 + 3\alpha_{11} + \alpha_{12}, \\ s_6 &= \alpha_3 + \alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_8 + 2\alpha_9 + 3\alpha_{10} + \alpha_{11} + 3\alpha_{12}, \\ s_7 &= \alpha_2 - 2\alpha_4 + \alpha_5 + 3\alpha_7 - 2\alpha_8 + \alpha_9 + 3\alpha_{11} + \alpha_{12}, \\ s_8 &= \alpha_3 - \alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_8 - 2\alpha_9 + 3\alpha_{10} - \alpha_{11} - 3\alpha_{12}.\end{aligned}$$

Tähistame võrrandisüsteemi maatriksi  $\mathbf{C}$  ja antud suuruste vektorit traditsiooniliselt  $\mathbf{a}^e = (w_1 \ w_2 \ \dots \ s_8)$ . Kujufunktsioonid määrame vastavalt võrdusele (2.12). Vektor  $\mathbf{p}$  on antud juhul  $\mathbf{p} = (1 \ \xi \ \eta \ \dots \ \xi\eta^3)$ . Element haaval võrduse lahti kirjutades, saame esimeseks neljaks kujufunktsiooniks

$$\begin{aligned}N_1 &= -\frac{1}{8}(\eta - 1)(\xi - 1)(\xi^2 + \xi + \eta^2 + \eta - 2), \\ N_2 &= \frac{1}{8}(\eta - 1)(\xi + 1)(\xi^2 - \xi + \eta^2 + \eta - 2), \\ N_3 &= -\frac{1}{8}(\eta + 1)(\xi + 1)(\xi^2 - \xi + \eta^2 - \eta - 2), \\ N_4 &= \frac{1}{8}(\eta + 1)(\xi - 1)(\xi^2 + \xi + \eta^2 - \eta - 2).\end{aligned}\tag{3.22}$$

Ülejäänud kaheksa kujufunktsiooni on

$$\begin{aligned}
N_5 &= -\frac{1}{8}(\xi + 1)(\eta - 1)(\xi - 1)^2, & N_6 &= -\frac{1}{8}(\xi - 1)(\eta + 1)(\eta - 1)^2, \\
N_7 &= -\frac{1}{8}(\xi - 1)(\eta - 1)(\xi + 1)^2, & N_8 &= \frac{1}{8}(\xi + 1)(\eta + 1)(\eta - 1)^2, \\
N_9 &= \frac{1}{8}(\xi - 1)(\eta + 1)(\xi + 1)^2, & N_{10} &= \frac{1}{8}(\xi + 1)(\eta - 1)(\eta + 1)^2, \\
N_{11} &= \frac{1}{8}(\xi + 1)(\eta + 1)(\xi - 1)^2, & N_{12} &= -\frac{1}{8}(\xi - 1)(\eta - 1)(\eta + 1)^2.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Üldistame tulemust suvalisele ristküliku kujulisele elemendile. Kordinaatide üleminekuvalemid lokaalsest  $\xi\eta$ -teljestikust globaalsesse  $xy$ -teljestikku võib võtta kujul (3.17). See lineaarteisendus viib lokaalse aproksimatsiooni kujul (3.21) üle peaaegu samal kujul olevaks globaalseks aproksimatsiooniks. Reeglina tekkivad selle tõttu mõned omavahel sõltuvate kordajatega neljanda astmega lisaliikmed, mis ei muuda elemendi aproksimatsioonijärku.

Aproksimatsiooni lokaalsed ja globaalsed osatuletised on omavahelise omavahel seotud võrrandiga (3.19), kus üleminekumaatriks  $\mathbf{J}^T$  on kujul (3.18). Võttes blokkdiagonaalmaatriksi  $\mathbf{D}$ , mille diagonaalil on ühikmaatriks  $\mathbf{I}_4$  ja seejärel neli korda maatriks  $\mathbf{J}^T$ , saab kordajad  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{12}$  määrava võrrandisüsteemi kirjutada üles kujul

$$\mathbf{D}\alpha^e = \mathbf{C}\alpha,$$

seega kujufunktsioonid avalduvad kujul

$$\mathbf{N}' = \mathbf{p}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{D} = \mathbf{N}\mathbf{D}.$$

Maatriksseose element haaval lahti kirjutamisel saame

$$\begin{aligned}
N'_i &= N_i, \quad i = 1, 2, 3, 4; \\
N'_5 &= \frac{x_2 - x_1}{2}N_5 + \frac{x_3 - x_2}{2}N_6, & N'_6 &= \frac{y_2 - y_1}{2}N_5 + \frac{y_3 - y_2}{2}N_6, \\
N'_7 &= \frac{x_2 - x_1}{2}N_7 + \frac{x_3 - x_2}{2}N_8, & N'_8 &= \frac{y_2 - y_1}{2}N_7 + \frac{y_3 - y_2}{2}N_8, \\
N'_9 &= \frac{x_2 - x_1}{2}N_9 + \frac{x_3 - x_2}{2}N_{10}, & N'_{10} &= \frac{y_2 - y_1}{2}N_9 + \frac{y_3 - y_2}{2}N_{10}, \\
N'_{11} &= \frac{x_2 - x_1}{2}N_{11} + \frac{x_3 - x_2}{2}N_{12}, & N'_{12} &= \frac{y_2 - y_1}{2}N_{11} + \frac{y_3 - y_2}{2}N_{12}.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Vaatame nüüd ristkülikelemendi üldistust nelja sõlmega nelinurkelementi. Selle elemendi saamiseks kasutame sama šablooni kui ristkülikelemendi korral. Teisenduse defineerimiseks tähistame funktsioonid<sup>14</sup>

$$\begin{aligned}
M_1 &= \frac{1}{4}(\xi - 1)(\eta - 1), & M_2 &= -\frac{1}{4}(\xi + 1)(\eta - 1), \\
M_3 &= \frac{1}{4}(\xi + 1)(\eta + 1), & M_4 &= -\frac{1}{4}(\xi - 1)(\eta + 1).
\end{aligned} \tag{3.25}$$

<sup>14</sup>Need funktsioonid on nelja sõlmelise ja nelja tingimusega ruudukujulise elemendi kujufunktsioonid. Antud viisil teisenduse defineerimine on küllaltki tüüpiline, seda kasutatakse tihti isoparameetriliste elementide korral.

Vastav bilineaarne teisendus, mis viib meie šabloonis soovitud nelinurgaks globaalses  $xy$ -teljestikus, on kujul

$$x = \mathbf{M}(\xi, \eta)\mathbf{x}^e, \quad y = \mathbf{M}(\xi, \eta)\mathbf{y}^e, \quad (3.26)$$

kus rea ja veeru vektorid on

$$\mathbf{M} = (M_1 \ M_2 \ M_3 \ M_4), \quad \mathbf{x}^e = (x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4)^T, \quad \mathbf{y}^e = (y_1 \ y_2 \ y_3 \ y_4)^T.$$

Alaloogselt ristkülikelemendile jätame aproksimatsiooni kuju lokaalses teljestikus samaks. Teisenduse (3.26) kujus lähtuvalt saame seosed osatuletistete vahel

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial \xi} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{M}(\xi, \eta)}{\partial \xi} \mathbf{x}^e + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{M}(\xi, \eta)}{\partial \xi} \mathbf{y}^e, \\ \frac{\partial w}{\partial \eta} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{M}(\xi, \eta)}{\partial \eta} \mathbf{x}^e + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{M}(\xi, \eta)}{\partial \eta} \mathbf{y}^e. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Alaloogselt ristkülikelemendiga toome sisse üleminekumaatriksi  $\mathbf{J}^T$ . Arvutades sõlmedes 1,2,3 ja 4 võrdustes (3.27) olevad osatuletiste  $\frac{\partial w}{\partial x}$  ja  $\frac{\partial w}{\partial y}$  kordajad, saame tulemuseks maatriksid

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_1^T &= \begin{pmatrix} \frac{x_2-x_1}{2} & \frac{y_2-y_1}{2} \\ \frac{x_4-x_1}{2} & \frac{y_4-y_1}{2} \end{pmatrix}, & \mathbf{J}_2^T &= \begin{pmatrix} \frac{x_2-x_1}{2} & \frac{y_2-y_1}{2} \\ \frac{x_3-x_2}{2} & \frac{y_3-y_2}{2} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{J}_3^T &= \begin{pmatrix} \frac{x_3-x_4}{2} & \frac{y_3-y_4}{2} \\ \frac{x_3-x_2}{2} & \frac{y_3-y_2}{2} \end{pmatrix}, & \mathbf{J}_4^T &= \begin{pmatrix} \frac{x_3-x_4}{2} & \frac{y_3-y_4}{2} \\ \frac{x_4-x_1}{2} & \frac{y_4-y_1}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Võttes blokkdiagonaalmaatriksiks  $\mathbf{D}$  maatriksi, mille peadiagonaalil on ühikmaatriks  $\mathbf{I}_4$  ja seejärel maatriksid  $\mathbf{J}_1^T, \mathbf{J}_2^T, \mathbf{J}_3^T$  ja  $\mathbf{J}_4^T$ , saame  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{12}$  leidmiseks uue maatriksvõrrandi

$$\mathbf{D}\mathbf{a}^e = \mathbf{C}\alpha,$$

analoogselt ristkülikelemendiga on kujufunktsioonid avaldatavad lineaarkombinatsioonidena šabloonfunktsioonidest

$$\begin{aligned} N_i'' &= N_i, \quad i = 1, 2, 3, 4; \\ N_5'' &= \frac{x_2-x_1}{2}N_5 + \frac{x_4-x_1}{2}N_6, & N_6'' &= \frac{y_2-y_1}{2}N_5 + \frac{y_4-y_1}{2}N_6, \\ N_7'' &= \frac{x_2-x_1}{2}N_7 + \frac{x_3-x_2}{2}N_8, & N_8'' &= \frac{y_2-y_1}{2}N_7 + \frac{y_3-y_2}{2}N_8, \\ N_9'' &= \frac{x_3-x_4}{2}N_9 + \frac{x_3-x_2}{2}N_{10}, & N_{10}'' &= \frac{y_3-y_4}{2}N_9 + \frac{y_3-y_2}{2}N_{10}, \\ N_{11}'' &= \frac{x_3-x_4}{2}N_{11} + \frac{x_4-x_1}{2}N_{12}, & N_{12}'' &= \frac{y_3-y_4}{2}N_{11} + \frac{y_4-y_1}{2}N_{12}, \end{aligned} \quad (3.28)$$

Et kujufunktsioonid on lineaarkombinatsioonid šabloonfunktsioonidest (3.22) ja (3.23), siis leiame siin vaid nendele vastavad maatriksid  $\nabla \mathbf{N}$  ja  $\mathbf{B}$ . Gradiendi

elemendid on

$$\begin{aligned}
\nabla N_{1,1} &= -\frac{1}{8}(\eta-1)(\eta^2+\eta+3\xi^2-3), & \nabla N_{2,1} &= -\frac{1}{8}(\xi-1)(\xi^2+\xi+3\eta^2-3), \\
\nabla N_{1,2} &= \frac{1}{8}(\eta-1)(\eta^2+\eta+3\xi^2-3), & \nabla N_{2,2} &= \frac{1}{8}(1+\xi)(\xi^2-\xi+3\eta^2-3), \\
\nabla N_{1,3} &= -\frac{1}{8}(1+\eta)(\eta^2-\eta+3\xi^2-3), & \nabla N_{2,3} &= -\frac{1}{8}(1+\xi)(\xi^2-\xi+3\eta^2-3), \\
\nabla N_{1,4} &= \frac{1}{8}(1+\eta)(\eta^2-\eta+3\xi^2-3), & \nabla N_{2,4} &= \frac{1}{8}(\xi-1)(\xi^2+\xi+3\eta^2-3), \\
\nabla N_{1,5} &= -\frac{1}{8}(\xi-1)(\eta-1)(3\xi+1), & \nabla N_{2,5} &= -\frac{1}{8}(1+\xi)(\xi-1)^2, \\
\nabla N_{1,6} &= -\frac{1}{8}(1+\eta)(\eta-1)^2, & \nabla N_{2,6} &= -\frac{1}{8}(\eta-1)(\xi-1)(3\eta+1), \\
\nabla N_{1,7} &= -\frac{1}{8}(1+\xi)(\eta-1)(3\xi-1), & \nabla N_{2,7} &= -\frac{1}{8}(\xi-1)(1+\xi)^2, \\
\nabla N_{1,8} &= \frac{1}{8}(1+\eta)(\eta-1)^2, & \nabla N_{2,8} &= \frac{1}{8}(\eta-1)(1+\xi)(3\eta+1), \\
\nabla N_{1,9} &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(3\xi-1), & \nabla N_{2,9} &= \frac{1}{8}(\xi-1)(1+\xi)^2, \\
\nabla N_{1,10} &= \frac{1}{8}(\eta-1)(1+\eta)^2, & \nabla N_{2,10} &= \frac{1}{8}(1+\eta)(1+\xi)(3\eta-1), \\
\nabla N_{1,11} &= \frac{1}{8}(\xi-1)(1+\eta)(3\xi+1), & \nabla N_{2,11} &= \frac{1}{8}(1+\xi)(\xi-1)^2, \\
\nabla N_{1,12} &= -\frac{1}{8}(\eta-1)(1+\eta)^2, & \nabla N_{2,12} &= -\frac{1}{8}(1+\eta)(\xi-1)(3\eta-1).
\end{aligned}$$

Arvutusliku efektiivsuse tõstmiseks saab teha järgmised asendused:

$$\begin{aligned}
a_1 &= 1 + \xi, & b_1 &= 3\xi + 1, & c_1 &= \xi^2 + \xi + 3\eta^2 - 3, \\
a_2 &= 1 - \xi, & b_2 &= 3\xi - 1, & c_2 &= \xi^2 - \xi + 3\eta^2 - 3, \\
a_3 &= 1 + \eta, & b_3 &= 3\eta + 1, & c_3 &= \eta^2 + \eta + 3\xi^2 - 3, \\
a_4 &= 1 - \eta, & b_4 &= 3\eta - 1, & c_4 &= \eta^2 - \eta + 3\xi^2 - 3.
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Selle tulemusena saab maatriks  $\nabla \mathbf{N}$  kompaktsse kuju

$$\nabla \mathbf{N} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} a_4 c_3, & -a_4 c_3, & -a_3 c_4, & a_3 c_4, & -a_2 a_4 b_1, & -a_3 a_4^2, & a_1 a_4 b_2, & a_3 a_4^2, & a_1 a_3 b_2, & -a_4 a_3^2, & -a_2 a_3 b_1, & a_4 a_3^2 \\ a_2 c_1, & a_1 c_2, & -a_1 c_2, & -a_2 c_1, & -a_1 a_2^2, & -a_4 a_2 b_3, & a_2 a_1^2, & -a_4 a_1 b_3, & -a_2 a_1^2, & a_3 a_1 b_4, & a_1 a_2^2, & a_3 a_2 b_4 \end{pmatrix}.$$

Maatriksi **B** elemendid on kujul

$$\begin{aligned}
B_{1,1} &= -\frac{3}{4}\xi(\eta - 1), & B_{2,1} &= -\frac{3}{4}\eta(\xi - 1), & B_{3,1} &= -\frac{3}{4}\xi^2 - \frac{3}{4}\eta^2 + 1, \\
B_{1,2} &= \frac{3}{4}\xi(\eta - 1), & B_{2,2} &= \frac{3}{4}\eta(1 + \xi), & B_{3,2} &= \frac{3}{4}\xi^2 + \frac{3}{4}\eta^2 - 1, \\
B_{1,3} &= -\frac{3}{4}\xi(1 + \eta), & B_{2,3} &= -\frac{3}{4}\eta(1 + \xi), & B_{3,3} &= -\frac{3}{4}\xi^2 - \frac{3}{4}\eta^2 + 1, \\
B_{1,4} &= \frac{3}{4}\xi(1 + \eta), & B_{2,4} &= \frac{3}{4}\eta(\xi - 1), & B_{3,4} &= \frac{3}{4}\xi^2 + \frac{3}{4}\eta^2 - 1, \\
B_{1,5} &= -\frac{1}{4}(\eta - 1)(3\xi - 1), & B_{2,5} &= 0, & B_{3,5} &= -\frac{1}{4}(\xi - 1)(3\xi + 1), \\
B_{1,6} &= 0, & B_{2,6} &= -\frac{1}{4}(\xi - 1)(3\eta - 1), & B_{3,6} &= -\frac{1}{4}(\eta - 1)(3\eta + 1), \\
B_{1,7} &= -\frac{1}{4}(\eta - 1)(3\xi + 1), & B_{2,7} &= 0, & B_{3,7} &= -\frac{1}{4}(1 + \xi)(3\xi - 1), \\
B_{1,8} &= 0, & B_{2,8} &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(3\eta - 1), & B_{3,8} &= \frac{1}{4}(\eta - 1)(3\eta + 1), \\
B_{1,9} &= \frac{1}{4}(1 + \eta)(3\xi + 1), & B_{2,9} &= 0, & B_{3,9} &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(3\xi - 1), \\
B_{1,10} &= 0, & B_{2,10} &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(3\eta + 1), & B_{3,10} &= \frac{1}{4}(1 + \eta)(3\eta - 1), \\
B_{1,11} &= \frac{1}{4}(1 + \eta)(3\xi - 1), & B_{2,11} &= 0, & B_{3,11} &= \frac{1}{4}(\xi - 1)(3\xi + 1), \\
B_{1,12} &= 0, & B_{2,12} &= -\frac{1}{4}(\xi - 1)(3\eta + 1), & B_{3,12} &= -\frac{1}{4}(1 + \eta)(3\eta - 1).
\end{aligned}$$

Kasutadas asenduste (3.29) kahte esimest tulpa ja lisaasendust

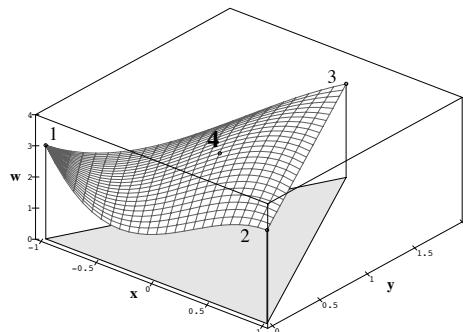
$$c = 3(\xi^2 + \eta^2), \quad (3.30)$$

saab maatriksi **B** muuta kompaksemaks

$$\mathbf{B} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3\xi a_4, & -3\xi a_4, & -3\xi a_3, & 3\xi a_3, & a_4 b_2, & 0, & a_4 b_1, & 0, & a_3 b_1, & 0, & a_3 b_2, & 0 \\ 3\eta a_2, & 3\eta a_1, & -3\eta a_1, & -3\eta a_2, & 0, & b_4 a_2, & 0, & b_4 a_1, & 0, & b_3 a_1, & 0, & b_3 a_2 \\ 4 - c, & c - 4, & 4 - c, & c - 4, & b_1 a_2, & b_3 a_4, & -a_1 b_2, & -b_3 a_4, & a_1 b_2, & a_3 b_4, & -b_1 a_2, & -a_3 b_4 \end{pmatrix}.$$

## 5 Nelja sõlmega kolmnurkelement

Me kasutame antud elementi, kuna see sobib neljasõlmelise nelinurkelemendiga. Sõlmedes 1,2,3 saab ette anda läbipainde  $w$  ja läbipainde tuletised  $\frac{\partial w}{\partial x}$  ja  $\frac{\partial w}{\partial y}$ . Lisaks saab kolmnurga mediaanide lõikepunktis ette anda läbipainde  $w$ .



Joonis 18: Näide neljasõlmelisest kolmnurkelemendist.

Neljas sõlm on lisatud praktilistel kaalutlustel. Kolm sõlme annavad 9 vabalt fikseeritavat kordajat. Selleks, et aproksimatsiooni järk oleks sama, mis neljasõlmelisel nelinurkelemendil, on tarvis veel tüht kordajat. Sümmetriikaalutlustel ei saa külgedele uut sõlme lisada, seega tuleb see lisada kolmnurga sisse<sup>15</sup>. Tuues sisse pindalakoordinaadid, on mediaanide lõikepunkt sümmeetriline kõigi pindalakoordinaatide suhtes<sup>16</sup>. Fikseerime lokaalse aproksimatsiooni kujul

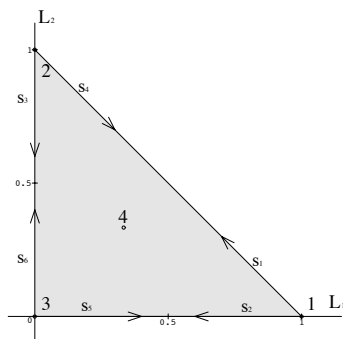
$$w = \alpha_1 + \alpha_2 \mathcal{L}_1 + \alpha_3 \mathcal{L}_2 + \alpha_4 \mathcal{L}_1^2 + \alpha_5 \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2 + \alpha_6 \mathcal{L}_2^2 + \alpha_7 \mathcal{L}_1^3 + \alpha_8 \mathcal{L}_1^2 \mathcal{L}_2 + \alpha_9 \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2^2 + \alpha_{10} \mathcal{L}_3^3. \quad (3.31)$$

Et osatuletised antakse ette paaris, siis saame efektiivselt ära kasutada lokaalses  $\mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2$ -teljestikus saadud tulemusi. Et lokaalses teljestikus saadud kujufunktsioonid oleksid sümmeetrilised, anname sümmeetrilised algingimused. Selleks anname osatuletised, mitte  $\mathcal{L}_1$  ja  $\mathcal{L}_2$ -telje suunas, vaid igas välissõlmes suunatuna kolmnurga sisse.

<sup>15</sup>Sellisel lähenemisel on küll puudused, sest kasulik on omada sõlme mitmes elemendis st. elemendi rajal. Aga aproksimatsiooni järgu tõus võiks selle korvata.

<sup>16</sup>Mediaanide lõikepunkt jaotab mediaani suhtes 1:2. Kasutades seda pindalakoordinaatide arvutamisel, saame lihtsatel geomeetristel kaalutlustest  $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_3$ .





Joonis 19: Neljasõlmelise kolmnurkelemendi šabloon.

Kordajate  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{10}$  määramiseks saame järgmised võrrandid

$$w_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_7$$

$$w_2 = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_6 + \alpha_{10}$$

$$w_3 = \alpha_1$$

$$w_4 = \alpha_1 + \frac{1}{3}(\alpha_2 + \alpha_3) + \frac{1}{9}(\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6) + \frac{1}{27}(\alpha_7 + \alpha_8 + \alpha_9 + \alpha_{10})$$

$$s_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\partial w(1,0)}{\partial \mathcal{L}_2} - \frac{\partial w(1,0)}{\partial \mathcal{L}_1} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\alpha_2 + \alpha_3 - 2\alpha_4 + \alpha_5 - 3\alpha_7 + \alpha_8)$$

$$s_2 = -\frac{\partial w(1,0)}{\partial \mathcal{L}_1} = -\alpha_2 - 2\alpha_4 - 3\alpha_7$$

$$s_3 = -\frac{\partial w(0,1)}{\partial \mathcal{L}_2} = -\alpha_3 - 2\alpha_6 - 3\alpha_{10}$$

$$s_4 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\partial w(0,1)}{\partial \mathcal{L}_1} - \frac{\partial w(0,1)}{\partial \mathcal{L}_2} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_5 - 2\alpha_6 + \alpha_9 - 3\alpha_{10})$$

$$s_5 = \alpha_2$$

$$s_6 = \alpha_3$$

Tähistame võrrandisüsteemi kordajate maatriksit  $\mathbf{C}$ . Maatriksi pööramisreegli (2.12) abil saame avaldada kujufunktsioonid, millest esimesed neli avalduvad kujul

$$N_1 = \mathcal{L}_1(-2\mathcal{L}_1^2 + 7\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2 + 7\mathcal{L}_2^2 + 3\mathcal{L}_1 - 7\mathcal{L}_2),$$

$$N_2 = \mathcal{L}_2(7\mathcal{L}_1^2 + 7\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2 - 2\mathcal{L}_2^2 - 7\mathcal{L}_1 + 3\mathcal{L}_2),$$

$$N_3 = (\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 - 1)(2\mathcal{L}_1^2 + 11\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2 + 2\mathcal{L}_2^2 - \mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_2 - 1),$$

$$N_4 = 27\mathcal{L}_2\mathcal{L}_1(1 - \mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_2)$$

ja ülejäänud kuus kujufunktsiooni avalduvad kujul

$$\begin{aligned}
N_5 &= \sqrt{2}\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2(-1 + 2\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2), \\
N_6 &= \mathcal{L}_1(1 - \mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_2)(\mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_2), \\
N_7 &= \mathcal{L}_2(1 - \mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_2)(\mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_1), \\
N_8 &= \sqrt{2}\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2(\mathcal{L}_1 + 2\mathcal{L}_2 - 1), \\
N_9 &= \mathcal{L}_1(\mathcal{L}_1 + 2\mathcal{L}_2 - 1)(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 - 1), \\
N_{10} &= \mathcal{L}_2(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 - 1)(2\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 - 1).
\end{aligned}$$

Kujufunktsioonide  $N_5$  ja  $N_8$  ees on irratsionaalne kordaja  $\sqrt{2}$ . Kuna edaspidises arutelus ilmneb, et tulemust üldistades taandub see välja, siis järgnevalt loobume irratsionaalsusest. Kasutades pindalakoordinaatide  $\mathcal{L}_1$ ,  $\mathcal{L}_2$  ja  $\mathcal{L}_3$  omavahelist seost, saab šabloonfunktsioonid  $N'_i$  muuta sümmeetriliseks:

$$\begin{aligned}
N'_1 &= \mathcal{L}_1^2(3 - 2\mathcal{L}_1) - 7\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2\mathcal{L}_3, & N'_2 &= \mathcal{L}_2^2(3 - 2\mathcal{L}_2) - 7\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2\mathcal{L}_3, \\
N'_3 &= \mathcal{L}_3^2(3 - 2\mathcal{L}_3) - 7\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2\mathcal{L}_3, & N'_4 &= 27\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2\mathcal{L}_3, \\
N'_5 &= \mathcal{L}_1\mathcal{L}_2(\mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_3), & N'_6 &= \mathcal{L}_1\mathcal{L}_3(\mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_2), \\
N'_7 &= \mathcal{L}_2\mathcal{L}_3(\mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_1), & N'_8 &= \mathcal{L}_1\mathcal{L}_2(\mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_3), \\
N'_9 &= \mathcal{L}_1\mathcal{L}_3(\mathcal{L}_3 - \mathcal{L}_2), & N'_{10} &= \mathcal{L}_2\mathcal{L}_3(\mathcal{L}_3 - \mathcal{L}_1).
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Võtame teisenduse šabloonist globaalsesse  $xy$ -teljestikku vastavalt valemitele (3.6). Üleminekumaatriks  $\mathbf{J}^T$ , mis seob tuletisi lokaalses teljestikus ja tuletistega globaalses teljestikus, on konstantne ja avaldub vastavalt valemile (4.2)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 \end{pmatrix}. \tag{3.33}$$

Globaalses teljestikus anname ette osatuletised  $\frac{\partial w}{\partial x}$  ja  $\frac{\partial w}{\partial y}$ , kuid et lokaalselt andsime šabloonfunktsioonide tuletamisel igas sõlmes erisuunalised osatuletised, siis on tarvis eraldi üleminekumaatrikseid, mis teisendaksid  $\nabla_{\xi\eta}w$  sõlmedes olevateks osatuletisteks. Seega teisendavad  $\nabla_{xy}w$ , meile sobivateks osatuletisteks üleminekumaatriksid

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{J}^T = \begin{pmatrix} \frac{x_2-x_1}{\sqrt{2}} & \frac{y_1-y_2}{\sqrt{2}} \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{pmatrix}, \tag{3.34}$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \mathbf{J}^T = \begin{pmatrix} x_3-x_1 & y_3-y_1 \\ \frac{x_1-x_2}{\sqrt{2}} & \frac{y_1-y_2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \tag{3.35}$$

$$\mathbf{A}_3 = \mathbf{I}_2 \mathbf{J}^T = \mathbf{J}^T, \tag{3.36}$$

mis on indekseeritud vastavalt sõlmedele. Võttes plokkdiagonaalmaatriksi  $\mathbf{D}$  diagonaalile ühikmaatriksi  $\mathbf{I}_4$  ja maatriksid  $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$  ja  $\mathbf{A}_3$  saame kordajate  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{10}$  määramiseks võrrandisüsteemi

$$\mathbf{D}\mathbf{a}^e = \mathbf{C}\boldsymbol{\alpha}.$$

Analoogselt valemile (2.12) saame avaldada uued kujufunktsioonid vanade kaudu

$$\mathbf{N}'' = \mathbf{p}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{D} = \mathbf{N}\mathbf{D}.$$

Seose element haaval lahti kirjutades, saame irratsionaalsusteta tulemuse

$$\begin{aligned}
N_i'' &= N_i, \quad i = 1, 2, 3, 4; \\
N_5'' &= (x_2 - x_1)N_5' + (x_3 - x_1)N_6', & N_6'' &= (y_2 - y_1)N_5' + (y_3 - y_1)N_6', \\
N_7'' &= (x_3 - x_1)N_7' + (x_1 - x_2)N_8', & N_8'' &= (y_3 - y_1)N_7' + (y_1 - y_2)N_8', \\
N_9'' &= (x_1 - x_3)N_9' + (x_2 - x_3)N_{10}', & N_{10}'' &= (y_1 - y_3)N_9' + (y_2 - y_3)N_{10}',
\end{aligned}$$

Kuna kujufunktsioonid on lineaarkombinatsioonid šabloonfunktsioonidest  $\mathbf{N}'$ , siis arvutame vaid nendele vastavate maatriksite  $\nabla \mathbf{N}$  ja  $\mathbf{B}$  elemendid. Maatriksi  $\nabla \mathbf{N}$  elemendid avalduvad järgmiselt:

$$\begin{aligned}
\nabla N_{1,1} &= 6(\mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_1^2) + 7(\mathcal{L}_2^2 - \mathcal{L}_2) + 14\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2, \\
\nabla N_{2,1} &= 7\mathcal{L}_1(-1 + \mathcal{L}_1 + 2\mathcal{L}_2), \\
\nabla N_{1,2} &= 7\mathcal{L}_2(2\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 - 1), \\
\nabla N_{2,2} &= 7(\mathcal{L}_1^2 - 7\mathcal{L}_1) + 6(\mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_2^2) + 14\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2, \\
\nabla N_{1,3} &= 6(\mathcal{L}_1^2 - 6\mathcal{L}_1) + 13(\mathcal{L}_2^2 - \mathcal{L}_2) + 26\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2, \\
\nabla N_{2,3} &= 13(\mathcal{L}_1^2 - \mathcal{L}_1) + 6(\mathcal{L}_2^2 - \mathcal{L}_2) + 26\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2, \\
\nabla N_{1,4} &= -27\mathcal{L}_2(2\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 - 1), \\
\nabla N_{2,4} &= -27\mathcal{L}_1(\mathcal{L}_1 + 2\mathcal{L}_2 - 1), \\
\nabla N_{1,5} &= \mathcal{L}_2(4\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 - 1), \\
\nabla N_{2,5} &= \mathcal{L}_1(2\mathcal{L}_1 + 2\mathcal{L}_2 - 1), \\
\nabla N_{1,6} &= 2\mathcal{L}_1 - 3\mathcal{L}_1^2 + \mathcal{L}_2^2 - \mathcal{L}_2, \\
\nabla N_{2,6} &= \mathcal{L}_1(2\mathcal{L}_2 - 1), \\
\nabla N_{1,7} &= \mathcal{L}_2(2\mathcal{L}_1 - 1), \\
\nabla N_{2,7} &= \mathcal{L}_1^2 - \mathcal{L}_1 - 3\mathcal{L}_2^2 + 2\mathcal{L}_2, \\
\nabla N_{1,8} &= \mathcal{L}_2(2\mathcal{L}_1 + 2\mathcal{L}_2 - 1), \\
\nabla N_{2,8} &= \mathcal{L}_1(\mathcal{L}_1 + 4\mathcal{L}_2 - 1), \\
\nabla N_{1,9} &= 1 + 3\mathcal{L}_1^2 - 4\mathcal{L}_1 + 2\mathcal{L}_2^2 - 3\mathcal{L}_2 + 6\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2, \\
\nabla N_{2,9} &= \mathcal{L}_1(3\mathcal{L}_1 + 4\mathcal{L}_2 - 3), \\
\nabla N_{1,10} &= \mathcal{L}_2(3\mathcal{L}_2 - 3 + 4\mathcal{L}_1), \\
\nabla N_{2,10} &= 1 + 2\mathcal{L}_1^2 - 3\mathcal{L}_1 + 3\mathcal{L}_2^2 - 4\mathcal{L}_2 + 6\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2.
\end{aligned}$$

Tehes järgnevad asendused

$$\begin{aligned}
a_1 &= \mathcal{L}_1(\mathcal{L}_1 - 1), & d_1 &= 2(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2) - 1, \\
a_2 &= \mathcal{L}_2(\mathcal{L}_2 - 1), & d_2 &= \mathcal{L}_2(2\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 - 1), \\
b &= \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2, & d_3 &= \mathcal{L}_1(\mathcal{L}_1 + 2\mathcal{L}_2 - 1), \\
c &= \mathcal{L}_1\mathcal{L}_2;
\end{aligned} \tag{3.37}$$

saavad maatriksi elemendid veidi kompaktsema kuju

$$\begin{aligned}
\nabla N_{1,1} &= -6a_1 + 7a_2 + 14c, & \nabla N_{2,1} &= 7d_3, \\
\nabla N_{1,2} &= 7d_2, & \nabla N_{2,2} &= 7a_1 - 6a_2 + 14c, \\
\nabla N_{1,3} &= 6a_1 + 13a_2 + 26c, & \nabla N_{2,3} &= 13a_1 + 6a_2 + 26c, \\
\nabla N_{1,4} &= -27d_2, & \nabla N_{2,4} &= -27d_3, \\
\nabla N_{1,5} &= \mathcal{L}_2(4\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 - 1), & \nabla N_{2,5} &= \mathcal{L}_1 d_1, \\
\nabla N_{1,6} &= -3a_1 + a_2 - \mathcal{L}_1, & \nabla N_{2,6} &= 2c - \mathcal{L}_1, \\
\nabla N_{1,7} &= 2c - \mathcal{L}_2, & \nabla N_{2,7} &= a_1 - 3a_2 - \mathcal{L}_2, \\
\nabla N_{1,8} &= \mathcal{L}_2 d_1, & \nabla N_{2,8} &= \mathcal{L}_1(\mathcal{L}_1 + 4\mathcal{L}_2 - 1), \\
\nabla N_{1,9} &= 3a_1 + 2a_2 - b + 6c + 1, & \nabla N_{2,9} &= \mathcal{L}_1(3\mathcal{L}_1 + 4\mathcal{L}_2 - 3), \\
\nabla N_{1,10} &= \mathcal{L}_2(4\mathcal{L}_1 + 3\mathcal{L}_2 - 3), & \nabla N_{2,10} &= 2a_1 + 3a_2 - b + 6c + 1.
\end{aligned}$$

Maatriksi **B** elemendid avalduvad järgmiselt:

$$\begin{aligned}
B_{1,1} &= 6 - 12\mathcal{L}_1 + 14\mathcal{L}_2, & B_{2,1} &= 14\mathcal{L}_1, & B_{3,1} &= 28\mathcal{L}_1 + 28\mathcal{L}_2 - 14, \\
B_{1,2} &= 14\mathcal{L}_2, & B_{2,2} &= 6 + 14\mathcal{L}_1 - 12\mathcal{L}_2, & B_{3,2} &= 28\mathcal{L}_1 + 28\mathcal{L}_2 - 14, \\
B_{1,3} &= 12\mathcal{L}_1 + 26\mathcal{L}_2 - 6, & B_{2,3} &= 26\mathcal{L}_1 + 12\mathcal{L}_2 - 6, & B_{3,3} &= 52\mathcal{L}_1 + 52\mathcal{L}_2 - 26, \\
B_{1,4} &= -54\mathcal{L}_2, & B_{2,4} &= -54\mathcal{L}_1, & B_{3,4} &= 54 - 108\mathcal{L}_1 - 108\mathcal{L}_2, \\
B_{1,5} &= 4\mathcal{L}_2, & B_{2,5} &= 2\mathcal{L}_1, & B_{3,5} &= 8\mathcal{L}_1 + 4\mathcal{L}_2 - 2, \\
B_{1,6} &= 2 - 6\mathcal{L}_1, & B_{2,6} &= 2\mathcal{L}_1, & B_{3,6} &= 4\mathcal{L}_2 - 2, \\
B_{1,7} &= 2\mathcal{L}_2, & B_{2,7} &= -6\mathcal{L}_2 + 2, & B_{3,7} &= 4\mathcal{L}_1 - 2, \\
B_{1,8} &= 2\mathcal{L}_2, & B_{2,8} &= 4\mathcal{L}_1, & B_{3,8} &= 4\mathcal{L}_1 + 8\mathcal{L}_2 - 2, \\
B_{1,9} &= 6\mathcal{L}_1 + 6\mathcal{L}_2 - 4, & B_{2,9} &= 4\mathcal{L}_1, & B_{3,9} &= 12\mathcal{L}_1 + 8\mathcal{L}_2 - 6, \\
B_{1,10} &= 4\mathcal{L}_2, & B_{2,10} &= 6\mathcal{L}_1 + 6\mathcal{L}_2 - 4, & B_{3,10} &= 8\mathcal{L}_1 + 12\mathcal{L}_2 - 6,
\end{aligned}$$

kusjuures mõneti aitab arvutuste efektiivsusust tõsta asendus

$$a = 2\mathcal{L}_1 + 2\mathcal{L}_2 - 1.$$

# IV peatükk

## Integreerimine

### 1 Maatriksite $\nabla N_\beta^e$ ja $B_\beta^e$ avaldamine lokaalses teljestikus

Eelmises peatükis tuletasime neli erinevat elementi. Kõigi nende juures kasutasime teatavat sorti šabloone ja regulaarset (lineaarset või bilineaarset) teisendust, mis viis šablooni meile sobiva kujuga elemendiks globaalses  $xy$ -teljestikus. See lähenemine võimaldas meil elementide kujufunktsioonide saamise taandada suures osas šabloonfunktsioonide kombineerimisele. Teine koht, kus saab elemendi šabloone edukalt ära kasutada, on integreerimine. Integreerimine fikseeritud kujuga šabloonis on tunduvalt lihtsam kui suvalise kujuga neli- või kolnmurgas. Järgneva osa eesmärk on tuletada üleminekuvalemid, mille alusel saaks piirduda integreerimisega šabloonelementides. Olgu meil teisendus

$$T : \begin{cases} x = x(\xi, \eta), \\ y = y(\xi, \eta) \end{cases}$$

lokaalsest teljestikust globaalsesse teljestikku. Vaatame esmalt kuidas avaldub  $\nabla_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} N_\beta^e$  lokaalsetes koordinaatides. Vastavalt liitfunktsiooni diferentseerimise reeglile, saame

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_\beta^e}{\partial \xi} &= \frac{\partial N_\beta^e}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_\beta^e}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_\beta^e}{\partial \eta} &= \frac{\partial N_\beta^e}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_\beta^e}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{aligned}$$

Need võrdused on kompaktselt esitatavad maatrikskujul

$$\nabla_{\xi, \eta} \mathbf{N}_\beta^e = \mathbf{J}^T \nabla_{x, y} \mathbf{N}_\beta^e, \quad (4.1)$$

kus  $\mathbf{J}$  on teisenduse  $T$  jakobijaan

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Lisaks jakobijaanile  $\mathbf{J}$  on muutujavahetuse tegemiseks kahekordses integraalis tarvis teada ka determinanti  $\det \mathbf{J}$ , mistõttu leiame lisaks maatriksitele  $\mathbf{J}$  ja  $\mathbf{J}^{-1}$  ka determinandi  $\det \mathbf{J}$ .

Erinevate elementide korral avalduvad  $\mathbf{J}$ ,  $\mathbf{J}^{-1}$  ja  $\det \mathbf{J}$  erinevalt. Kolmnurkse elemendi korral on, arvestades valemid<sup>17</sup> (3.6), tulemuseks<sup>18</sup>

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \begin{pmatrix} x_1 - x_3 & x_2 - x_3 \\ y_1 - y_3 & y_2 - y_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{2S_\Delta} \begin{pmatrix} y_2 - y_3 & x_3 - x_2 \\ y_3 - y_1 & x_1 - x_3 \end{pmatrix}, \\ \det \mathbf{J} &= 2S_\Delta = \mathbf{l}_{12} \times \mathbf{l}_{23}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

<sup>17</sup>Erinevate teisenduste ühesuse käsitlemise huvides on originaalteisenduses  $\mathcal{L}_1$  asendatud  $\xi$  ja  $\mathcal{L}_2$  asendatud  $\eta$ .

<sup>18</sup>Tähistame suurusega  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  kahe tasandilise vektori  $\mathbf{a}$  ja  $\mathbf{b}$  vektorkorrustise  $z$ -komponenti. Harilikult tähistatakse nii vektorkorrustist, aga antud juhul lihtsustab tähis avaldise. Pealegi on tasandiliste vektorite korral vektorkorrustise esimesed kaks komponenti alati nullid.

Ristküliku kujulise elemendi teisendus on kujul (3.17) ja tulemuseks on

$$\mathbf{J} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_2 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}^{-1} = \frac{2}{S} \begin{pmatrix} y_3 - y_2 & x_2 - x_3 \\ y_1 - y_2 & x_2 - x_1 \end{pmatrix}, \quad (4.4)$$

$$\det \mathbf{J} = \frac{S}{4} = \frac{l_{12}l_{23}}{4}.$$

Nelinurkse elemendi teisendus on kujul (3.26). Kuna vastavad maatriksid tulevad keeruliste elementidega, siis asendame korduvaid liikmeid uute tähistega.

$$\begin{aligned} a_1 &= x_1 - x_2 + x_3 - x_4, & b_1 &= y_1 - y_2 + y_3 - y_4, \\ a_2 &= x_1 + x_2 - x_3 - x_4, & b_2 &= y_1 + y_2 - y_3 - y_4, \\ a_3 &= x_1 - x_2 - x_3 + x_4, & b_3 &= y_1 - y_2 - y_3 + y_4, \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{\mathbf{l}_{23} \times \mathbf{l}_{34} - \mathbf{l}_{12} \times \mathbf{l}_{41}}{8} = \frac{\mathbf{l}_{12} \times \mathbf{l}_{14} + \mathbf{l}_{34} \times \mathbf{l}_{32}}{8} = \frac{S}{4}, \\ c_1 &= \frac{\mathbf{l}_{12} \times \mathbf{l}_{23} + \mathbf{l}_{12} \times \mathbf{l}_{41}}{8}, \quad c_2 = \frac{\mathbf{l}_{23} \times \mathbf{l}_{34} - \mathbf{l}_{12} \times \mathbf{l}_{23}}{8}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Selle tulemusena saame maatriksid  $\mathbf{J}$  ja  $\mathbf{J}^{-1}$  avaldada kompaktsel kujul

$$\mathbf{J} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} a_1\eta - a_3 & a_1\xi - a_2 \\ b_1\eta - b_3 & b_1\xi - b_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{4 \det \mathbf{J}} \begin{pmatrix} b_1\xi - b_2 & -a_1\xi + a_2 \\ -b_1\eta + b_3 & a_1\eta - a_3 \end{pmatrix},$$

$$\det \mathbf{J} = c_0 + c_1\xi + c_2\eta. \quad (4.7)$$

Lisaks sellele on meil tarvis leida üleminekuvalemid maatriksi  $\mathbf{B}$  arvutamiseks lokaalses teljestikus. Lähtume eelvalt tuletatud matriksvõrdustest (4.1). Neid komponenditi diferentseerides saame<sup>19</sup>

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 N_i^e}{\partial \xi^2} &= \frac{\partial^2 N_i^e}{\partial x^2} \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 N_i^e}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 N_i^e}{\partial y^2} \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 \\ &\quad + \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2}, \\ \frac{\partial^2 N_i^e}{\partial \xi \partial \eta} &= \frac{\partial^2 N_i^e}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 N_i^e}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial^2 N_i^e}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ &\quad + \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta}, \\ \frac{\partial^2 N_i^e}{\partial \eta^2} &= \frac{\partial^2 N_i^e}{\partial x^2} \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 N_i^e}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 N_i^e}{\partial y^2} \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \\ &\quad + \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} + \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Tähistame  $\mathbf{B}_{\xi, \eta}^i$  teiste tuletiste maatriksi  $i$ -ndat rida lokaalses  $\xi\eta$ -teljestikus ja  $\mathbf{B}_{x, y}^i$  teiste tuletiste maatriksi  $i$ -ndat rida globaalses  $xy$ -teljestikus ning tuues sisse üleminekumaatriksid

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ 2 \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} & 2 \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} & \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \end{pmatrix}, \quad (4.9)$$

<sup>19</sup>Et vältida topeltindekseid, siin loobume elementi tähistavast indeksist  $\beta$ .

võrdused (4.8) anda maatriksvõrdusena<sup>20</sup>

$$\mathbf{B}_{\xi,\eta}^i = \mathbf{Q}\mathbf{B}_{\mathbf{x},\mathbf{y}}^i + \mathbf{R}\nabla_{x,y}N_i.$$

ja seejärel üldistada üle terve maatriksi

$$\mathbf{B}_{\xi,\eta}^e = \mathbf{Q}\mathbf{B}_{\mathbf{x},\mathbf{y}}^e + \mathbf{R}\nabla_{\mathbf{x},\mathbf{y}}\mathbf{N}^e. \quad (4.10)$$

Kui elemendi šabloon on kolmnurkne, siis teisendusele (3.6) lineaarsuse tõttu on maatriks  $\mathbf{R} = \mathbf{0}$  ja seega saab võrrand (4.10) kujul

$$\mathbf{B}_{\xi,\eta} = \mathbf{Q}\mathbf{B}_{\mathbf{x},\mathbf{y}} \Leftrightarrow \mathbf{B}_{\mathbf{x},\mathbf{y}} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}_{\xi,\eta} \quad (4.11)$$

Kuna meil on tarvis minna üle lokaalsest teljestikust globaalsesse, siis avaldame vaid  $\mathbf{Q}^{-1}$ . Maatriksi elementide lihtsustamiseks tähistame maatriksis elemendi külgede vektorite  $\mathbf{l}_{12}$ ,  $\mathbf{l}_{23}$  ja  $\mathbf{l}_{31}$   $x$  komponente  $l_{*1}$  ja  $y$ -komponente  $l_{*2}$ . Vastavalt teisenduse kujule (3.6) saame tulemuseks

$$\mathbf{Q}^{-1} = \frac{1}{4S_{\Delta}^2} \begin{pmatrix} l_{23_2}^2 & l_{31_2}^2 & l_{31_2}l_{23_2} \\ l_{23_1}^2 & l_{31_1}^2 & l_{31_1}l_{23_1} \\ -2l_{23_2}l_{23_1} & -2l_{31_1}l_{31_2} & -l_{23_1}l_{31_2} - l_{23_2}l_{31_1} \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

Ristküliku kujulise elemendi korral on teisendus (3.17) lineaarne ja maatriks  $\mathbf{R} = \mathbf{0}$  ning kehtivad valemid (4.11). Maatriks  $\mathbf{Q}^{-1}$  avaldub vektorite  $\mathbf{l}_{12}$  ja  $\mathbf{l}_{23}$  komponentide kaudu

$$\mathbf{Q}^{-1} = \frac{4}{S^2} \begin{pmatrix} l_{23_2}^2 & l_{12_2}^2 & -l_{23_2}l_{12_2} \\ l_{23_1}^2 & l_{12_1}^2 & -l_{23_1}l_{12_1} \\ -2l_{23_1}l_{23_2} & -2l_{12_1}l_{12_2} & l_{12_1}l_{23_2} + l_{12_2}l_{23_1} \end{pmatrix}. \quad (4.13)$$

Nelinurkse elemendi teisendused pole lineaarsed, mille tõttu saame

$$\mathbf{B}_{\mathbf{x},\mathbf{y}}^e = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}_{\xi,\eta}^e - \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{R}\nabla_{\mathbf{x},\mathbf{y}}\mathbf{N}^e. \quad (4.14)$$

Maatriksi  $\nabla\mathbf{N}_{\mathbf{x},\mathbf{y}}^e$  saab leida vastavalt valemile (4.1). Kui lisaks asendustele (4.5) kasutada asendusi

$$\begin{aligned} d_0 &= \mathbf{l}_{23} \times \mathbf{l}_{34} - \mathbf{l}_{12} \times \mathbf{l}_{41} = 2S \\ c_1 &= -\mathbf{l}_{12} \times \mathbf{l}_{34}, \quad d_2 = -\mathbf{l}_{23} \times \mathbf{l}_{41}, \\ e_1 &= b_2 - b_1\xi, \quad e_2 = b_3 - b_1\eta, \\ e_3 &= a_2 - a_1\xi, \quad e_4 = a_3 - a_1\eta, \end{aligned} \quad (4.15)$$

siis saame maatriksid avaldada kujul

$$\mathbf{Q}^{-1} = \frac{4}{(d_0 + d_1\xi + d_2\eta)^2} \begin{pmatrix} e_1^2 & e_2^2 & -e_1e_2 \\ e_3^2 & e_4^2 & -e_3e_4 \\ -2e_1e_3 & -2e_2e_4 & e_1e_4 + e_2e_3 \end{pmatrix}, \quad (4.16)$$

$$\mathbf{R} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ a_1 & b_1 \end{pmatrix}. \quad (4.17)$$

---

<sup>20</sup>Kuna  $\mathbf{B}_{\mathbf{x},\mathbf{y}}$  viimane rida on kujul  $2\frac{\partial^2 N_i}{\partial x \partial y}$  ning  $\mathbf{B}_{\xi,\eta}$  viimane rida on  $2\frac{\partial^2 N_i}{\partial \xi \partial \eta}$ , siis maatriksi  $\mathbf{L}$  kordajate kuju erineb veidi eelnevate võrduste kordajatest.

## 2 Integreerimine lokaalses teljestikus

Vastavalt kahekordse integraali muutujavahetuse reeglile avaldub koormuse vektor  $\mathbf{f}_\beta^e$  integraalina üle šabloonelemendi  $S$

$$\mathbf{f}_\beta^e = \int_{\Omega_\beta} \mathbf{N}_\beta^{eT} q dx dy = \int_S \mathbf{N}_\beta^{eT} q \det \mathbf{J} d\xi d\eta. \quad (4.18)$$

Elemendi jäikusmaatriks avaldub kujul

$$\mathbf{K}_\beta^e = \int_{\Omega_\beta} \frac{t^3}{12} \mathbf{B}_{xy}^{eT} \mathbf{D} \mathbf{B}_{xy}^e dS = \int_S \frac{t^3}{12} \mathbf{B}_{xy}^{eT} \mathbf{D} \mathbf{B}_{xy}^e \det \mathbf{J} dS, \quad (4.19)$$

kus maatriks  $\mathbf{B}_{xy}^e$  tuleb leida vastavalt valemile (4.11) või (4.14). Rajaintegraali arvutamisel lokaalses teljestikus tuleb arvestada, et

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \mathbf{J} \begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \end{pmatrix}.$$

Kuna  $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ , siis saame tulemuseks

$$\begin{aligned} dl^2 &= (d\xi \ d\eta) \mathbf{J}^T \mathbf{J} (d\xi \ d\eta)^T = \\ &= \left( \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 \right) d\xi^2 + 2 \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) d\xi d\eta + \left( \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \right) d\eta^2 \end{aligned} \quad (4.20)$$

Nelinurkse elemendi 4 sõlmega elemendi ja ristküliku kujulise 8 sõlmega elemendi korral on rajal  $d\xi = 0$  või  $d\eta = 0$  ja seega tulemus lihtsustub vastavalt kujule

$$\begin{aligned} dl &= \sqrt{\left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2} d\xi, \text{ kui } d\eta = 0; \\ dl &= \sqrt{\left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2} d\eta, \text{ kui } d\xi = 0. \end{aligned}$$

Mistõttu ristküliku kujulise elemendi korral on

$$dl = \frac{l_{12}}{2} d\xi, \text{ kui } d\eta = 0; \quad (4.21)$$

$$dl = \frac{l_{12}}{2} d\eta, \text{ kui } d\xi = 0. \quad (4.22)$$

Kasutades asendusi (4.5), saame nelinurkse elemendi korral

$$dl = \frac{1}{4} \sqrt{(a_1 \eta - a_3)^2 + (b_1 \eta - b_3)^2} d\xi, \text{ kui } d\eta = 0; \quad (4.23)$$

$$dl = \frac{1}{4} \sqrt{(a_1 \xi - a_2)^2 + (b_1 \xi - b_2)^2} d\eta, \text{ kui } d\xi = 0. \quad (4.24)$$

Kuna külgedel on vastavalt  $\eta$  ja  $\xi$  konstantsed, siis ka ruutjuure alune avaldis on konstantne.



Kolmnurkse elemndi korral on kolmandal küljel  $d\eta = 0$ , teisel küljel  $d\xi = 0$  ja esimesel küljel  $d\xi = -d\eta$ . Mistõttu saame iga külje jaoks

$$dl_1 = l_{12}d\xi, \quad dl_2 = l_{23}d\eta, \quad dl_3 = l_{31}d\xi. \quad (4.25)$$

### 3 Rajajõudude vektori arvutatavad komponendid

Plaadile võib anda mitmesuguseid rajatingimusi, kuid neist levinumad on kolm järgmist

1. jäigalt kinnitatud serv  $w = const$  ja  $\frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} = const$ ;
2. vabalt toetatud serv  $w = const$  ja  $M_{nn} = 0$ ;
3. jõudude vaba serv  $M_{nn} = 0$  ja  $Q_{nz} + \frac{\partial M_{nm}}{\partial m} = 0$ .

Kui elemendis on rajatingimused 1 ja 2, siis pole võimalik vektori  $\mathbf{f}_{\mathbf{b}\beta}^e$  kõiki komponente arvutada. Arvutada on võimalik vaid neid komponente, mille korral määramata suurust sisaldav integraal tuleb null. Kuna rajatingimuste vektor on elemendis antud valemiga (2.38)

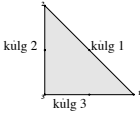
$$\mathbf{f}_{\mathbf{b}\beta}^e = \int_{\Gamma_\beta} \mathbf{N}_\beta^{eT} \left( Q_{nz} + \frac{\partial M_{nm}}{\partial m} \right) dl - \int_{\Gamma_\beta} (\nabla \mathbf{N}_\beta^e)^T \mathbf{n} M_{nn} dl, \quad (4.26)$$

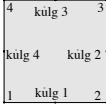
siis teist tüüpi rajatingimuse korral on komponent  $f_{b_i}$  arvutatav parajasti siis, kui rajaosal  $\Gamma_\beta$  on kujufunktsioon  $N_i \equiv 0$ . Esimese rajatingimuse korral peab lisaks sellele olema null ka normaali sihiline tuletis  $\frac{\partial N_i}{\partial \mathbf{n}}$ , sest


$$(\nabla \mathbf{N}_\beta^e)^T \mathbf{n} = \frac{\partial \mathbf{N}^e}{\partial \mathbf{n}}.$$

Seega esimese rajatingimuse korral on raja jõudude vektori komponent  $f_{b_i}$  arvutatav parajasti siis, kui raja osal  $\Gamma_\beta$  on kujufunktsioon  $N_i \equiv 0$  ja  $\nabla N_i \equiv 0$ . Esiteks peab  $N_i \equiv 0$  ja seega on puutujasihiline tuletis  $\frac{\partial N_i}{\partial \mathbf{m}} \equiv 0$  ning teiseks peab  $\frac{\partial N_i}{\partial \mathbf{n}} \equiv 0$ , mistõttu saame  $\nabla N_i \equiv 0$ .

Annname konkreetsete elementide ja rajatingimuse korral arvutatavad vektori  $\mathbf{f}_{\mathbf{b}\beta}^e$  komponendid järgmiste tabelitena. Vektorite komponendid on nummerdatud vastavalt kolmandale peatükile. Mitme rajatingimuse kombinatsiooni korral on küljed antud samas järjekorras rajatingimuste tüübiga.

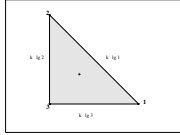
Kuue sõlmega kolmnurkelement		
		
Rajatingimus 2 ühel küljel		
Rajaosa $\Gamma_\beta$	Vektor $\mathbf{f}_\beta$	
	Arvutatavad	Arvutamatud
Kül 1	4	1,2,3,5,6
Kül 2	6	1,2,3,4,5
Kül 3	5	1,2,3,4,6
Rajatingimus 1		
Olenamata küljest on kõik komponendid arvutamatud.		
Rajatingimus 2 kahel või kolmel küljel		
Olenamata külgedest on kõik komponendid arvutamatud.		

Kaheksa sõlmega ristkülikelement		
		
Rajatingimus 2		
Olenemata küljest on kõik komponendid arvutamatud		
Rajatingimus 1		
Olenemata küljest on kõik komponendid arvutamatud.		

Nelja sõlmega nelinurkelement		
		
Rajatingimus 2 ühel küljel		
Rajaosa $\Gamma_\beta$	Vektor $\mathbf{f}_\beta$	
	Arvutatavad	Arvutamatud
Kül 1	3,4,6,8,9,10,11,12	1,2,5,7
Kül 2	1,4,5,6,7,9,11,12	2,3,8,10
Kül 3	1,2,5,6,7,8,10,12	3,4,9,11
Kül 4	2,3,5,7,8,9,10,11	1,4,6,12

Nelja sõlme nelinurkelement		
Rajatingimus 2 kahel küljel		
Rajaosa $\Gamma_\beta$	Vektor $\mathbf{f}_\beta$	
	Arvutatavad	Arvutamatud
Küljed 1 ja 2	4,6,9,11,12	1,2,3,5,7,8,10
Küljed 1 ja 3	6,8,10,12	1,2,3,4,5,7,9,11
Küljed 1 ja 4	3,8,9,10,11	1,2,4,5,6,7,12
Küljed 2 ja 3	1,5,6,7,12	2,3,4,8,9,10,11
Küljed 2 ja 4	5,7,9,11	1,2,3,4,6,8,10,12
Küljed 3 ja 4	2,5,7,8,10	1,3,4,6,9,11,12
Rajatingimus 3 kahel küljel		
Rajaosa $\Gamma_\beta$	Vektor $\mathbf{f}_\beta$	
	Arvutatavad	Arvutamatud
Küljed 1,2,3	6,12	1,2,3,4,5,7,8,9,10,11
Küljed 2,3,4	5,7	1,2,3,4,6,8,9,10,11,12
Küljed 3,4,1	8,10	1,2,3,4,5,6,7,9,11,12
Küljed 4,1,2	9,11	1,2,3,4,5,6,7,8,10,12
Rajatingimus 1 ühel küljel		
Rajaosa $\Gamma_\beta$	Vektor $\mathbf{f}_\beta$	
	Arvutatavad	Arvutamatud
Külge 1	10,12	1,2,3,4,5,6,7,8,9,11
Külge 2	5,11	1,2,3,4,6,7,8,9,10,12
Külge 3	6,8	1,2,3,4,5,7,9,10,11,12
Külge 4	7,9	1,2,3,4,5,6,8,10,11,12
Rajatingimus 1 mitmel küljel		
Olenemata külgedest on kõik komponendid arvutamatud.		
Rajatingimus 1 ja rajatingimus 2		
Rajaosa $\Gamma_\beta$	Vektor $\mathbf{f}_\beta$	
	Arvutatavad	Arvutamatud
Küljed 1 ja 2	12	1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11
Küljed 2 ja 1	11	1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,12
Küljed 2 ja 3	5	1,2,3,4,6,7,8,9,10,11,12
Küljed 3 ja 2	6	1,2,3,4,5,7,8,9,10,11,12
Küljed 3 ja 4	8	1,2,3,4,5,6,7,9,10,11,12
Küljed 4 ja 3	7	1,2,3,4,5,6,8,9,10,11,12
Küljed 4 ja 1	9	1,2,3,4,5,6,7,8,10,11,12
Küljed 1 ja 4	10	1,2,3,4,5,6,7,8,9,11,12
Küljed 1 ja 3	10,12	1,2,3,4,5,6,7,8,9,11
Küljed 3 ja 1	6,8	1,2,3,4,5,7,9,10,11,12
Küljed 2 ja 4	5,11	1,2,3,4,6,7,8,9,10,12
Küljed 4 ja 2	7,9	1,2,3,4,5,6,8,10,11,12
Rajatingimused 1, 2 ja 2		
Rajaosa $\Gamma_\beta$	Vektor $\mathbf{f}_\beta$	
	Arvutatavad	Arvutamatud
Küljed 1,2,3	12	1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11
Küljed 2,3,4	5	1,2,3,4,6,7,8,9,10,11,12
Küljed 3,4,1	8	1,2,3,4,5,6,7,9,10,11,12
Küljed 4,1,2	9	1,2,3,4,5,6,7,8,10,11,12
Küljed 3,1,2	3	1,2,3,4,5,7,8,9,10,11,12
Küljed 4,2,3	7	1,2,3,4,5,6,8,9,10,11,12
Küljed 1,4,3	10	1,2,3,4,5,6,7,8,9,11,12
Küljed 2,1,4	11	1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,12
Ülejäänud kolme küljega kombinatsioonide korral on kõik komponendid arvutamatud.		

Nelja sõlmega kolmnurkelement



Rajatingimus 2 ühel küljel

Rajaosa $\Gamma_\beta$	Vektor $\mathbf{f}_\beta$	
	Arvutatavad	Arvutamatud
Külge 1	3,4,6,7,9,10	1,2,5,8
Külge 2	1,4,5,6,8,9	2,3,7,10
Külge 3	2,4,5,7,8,10	1,3,6,9
Rajatingimus 2 kahel küljel		
Rajaosa $\Gamma_\beta$	Vektor $\mathbf{f}_\beta$	
	Arvutatavad	Arvutamatud
Küljed 1,2	4,6,9	1,2,3,5,7,8,10
Küljed 2,3	4,5,8	1,2,3,6,7,9,10
Küljed 3,1	4,7,10	1,2,3,5,6,8,9
Rajatingimus 2 kõigil kolmel küljel		
Küljed 1,2,3	4	1,2,3,5,6,7,8,9,10
Rajatingimus 1		
Olenemata külgede arvust on kõik komponendid arvutamatud		

## 4 Määramata rajatingimuste leidmine

Kui meil on mingil plaadi raja osal antud esimest ja teist tüüpi rajatingimused, siis reeglina huvitab meid pärast tulesande lahendamist ka rajal mõjuv moment  $M_{nn}$  ja lõikejõud  $Q_{nz}$ . Kasutades lahendit on võimalik mõlemad suurused leida, selleks kasutame võrdusi (1.28), (1.24) ning normaali ja puutuva positiivsest orientatsioonist tulenevat viimast võrdust

$$\begin{aligned}
 M_{nn} &= n_x^2 M_{xx} + n_y^2 M_{yy} + 2n_x n_y M_{xy}, \\
 M_{nm} &= n_x m_x M_{xx} + n_y m_y M_{yy} + (n_y m_x + n_x m_y) M_{xy}, \\
 Q_{nz} &= n_x Q_{xz} + n_y Q_{yz}, \\
 Q_{xz} &= \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}, \\
 Q_{yz} &= \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y}, \\
 \mathbf{M} &= -\frac{t^3}{12} \mathbf{DBa}, \\
 n_x &= m_y, \quad n_y = -m_x.
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

Tuues sisse reavektorid

$$\begin{aligned}
 \mathbf{c} &= (-n_x n_y, n_x n_y, n_x^2 - n_y^2), \\
 \mathbf{d} &= (n_x, 0, n_y), \\
 \mathbf{e} &= (0, n_y, n_x), \\
 \mathbf{h} &= (n_x^2, n_y^2, 2n_x n_y)
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

ja asendades maatriksi  $\mathbf{B}$  maatriksiga  $\mathbf{B}_\beta^e$  ja vektori  $\mathbf{a}$  vektoriga<sup>21</sup>  $\mathbf{a}_\beta^e$ , saame esimesed kolm võrdust elemendi jaoks panna kirja kujul

$$M_{nn} = \mathbf{hM} = -\frac{t^3}{12} \mathbf{hB}_\beta^e \mathbf{a}_\beta^e, \quad M_{nm} = \mathbf{cM} = -\frac{t^3}{12} \mathbf{cB}_\beta^e \mathbf{a}_\beta^e, \quad Q_{nz} = \mathbf{d} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x} + \mathbf{e} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial y},$$

kus  $\mathbf{B}$  on arvatatud globaalses teljestikus. Viimast võrdust saab lihtsustada arvutades vajalikud osatuletised

$$Q_{nz} = -\frac{t^3}{12} \left( \mathbf{d} \frac{\partial \mathbf{DB}_\beta^e}{\partial x} + \mathbf{e} \frac{\partial \mathbf{DB}_\beta^e}{\partial y} \right) \mathbf{a}_\beta^e.$$

Lisaks saab veel avaldada elemendi rajal mõjuva efektiivse lõikejõu

$$Q_{nz} + \frac{\partial M_{nm}}{\partial \mathbf{m}} = \frac{t^3}{12} \left( (n_y \mathbf{c} - \mathbf{d}) \frac{\partial \mathbf{DB}_\beta^e}{\partial x} - (n_x \mathbf{c} + \mathbf{e}) \frac{\partial \mathbf{DB}_\beta^e}{\partial y} \right) \mathbf{a}_\beta^e.$$

<sup>21</sup> Analoogselt teise peatiki paragrahvidele 5 ja 6 tähendab see lihtsalt ebaoluliste elementide kõrvaldamist.

## 5 Ligikaudne integreerimine

Lõplike elementide meetodi rakendamisel on põhi raskus keha jäikusmaatriksi  $\mathbf{K}$  ja jõuvektorite  $\mathbf{f}_b$  ja  $\mathbf{f}_i$  arvutamine. Harilikult tehakse seda ligikaudsete numbriliste meetoditega. Selleks on mitmeid põhjuseid. Kuna meetod ise on ligikaudne, siis täpne integreerimine ei anna paremat vastust võrreldes piisava täpsusastmega ligikaudse integreerimismeetodiga. Teiseks täpne integreerimine suurendab keha jäikust, ligikaudne integreerimine seevastu kompenseerib enamasti seda efekti. Heuristiliselt võib lõplike elementide meetodi keha jäigemaks muutmist seletada sellega, et lõplike elementide meetodi korral on keha läbipainde kuju piiratud lõpliku arvu fikseeritud funktsioonide lineaarkombinatsioonidega. Seetõttu ei saa plaati võtta suvalist kuju, mis tähendab täiendavaid piiranguid keha deformatsioonidele. See on intuiitvne põhjendus, miks mudel omab suuremat jäikust võrreldes tegelikusega<sup>22</sup> korrektsed tõestused on toodud näiteks raamatus [Hug87].

Kolmandaks võib täpne integreerimine osutada võimatuks või tülikaks. Näiteks võivad olla teada vaid ligikaudsed plaadi elastsusmaatriksi, koormuse või rajatingimuse väärtused. Ka keerulisel kujul olevad üleminekumaatriksid  $\mathbf{J}^{-1}$  ja  $\mathbf{Q}^{-1}$  võivad muuta täpse integreerimise võimatuks või tehniliselt keerukaks.

Ligikaudsel integreerimisel on ka mitmeid ohte. Üks peamisi neist on rikutud deformatsioonienergiaga olekud (*spurious zero-energy modes*). Kogu keha energia on arvutatav kui integraal

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} dV \quad (4.29)$$

Vastavalt seostele (1.20) ja (2.16) kehtib seos<sup>23</sup>

$$\boldsymbol{\varepsilon} = -z \mathbf{B} \mathbf{a}.$$

Asendades selle avaldisse (4.29) ja arvestades maatriksi  $\mathbf{K}$  definitsiooni (2.22) saame energia avaldada kui

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{a}^T \mathbf{K} \mathbf{a}.$$

Füüsikalistest kaalutlustest lähtuvalt on deformatsioonienergia alati mittenegatiivne. See on õige ka lõplike elementide meetodi korral. Saab näidata, et maatriks  $\mathbf{K}$  on poolpositiivselt määratud [OttPet92, lk. 170]. Deformatsioonienergiata reaalsed olekud tekivad plaadi liigutamisest ja pööramisest. Rikutud deformatsioonienergiaga olekud tekivad sellest, et ligikaudsel integreerimisel ei vaadata kogu plaati, vaid üksikuid punkte. Võib juhtuda, leidub lõplike elementide meetodi poolt lubatud deformatsioon  $w_{spur} \neq 0$ , mille korral on integreerimispunktid kõik deformatsioonikomponendid nullid või kompenseerivad vastastikku teineteist ja saame ligikaudsel integreerimisel tulemuseks  $U = 0$ . Kui valida koormuse vektor  $\mathbf{f}_i$  nii, et pärast rajatingimuste võrrandisse asendamist tekib lineaarne homogeene võrrandisüsteem

$$\tilde{\mathbf{K}} \tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{\mathbf{a}} \tilde{\mathbf{K}} \tilde{\mathbf{a}} = 0 \quad (4.30)$$

<sup>22</sup>See kehtib ka tldisemalt teiste elastsusteooria tlesannete ja soojusjuhtivuse tlesanneta korral.

<sup>23</sup>Siin on vaadeldud plaati, millele ei mõju normaaljõude st.  $\boldsymbol{\varepsilon}^0 \equiv 0$ .

ja seega on selle üheks lahendiks ka deformatsioon  $w_{spur}$ . Kui homogeesel võrrandisüsteemil (4.30) on peale null-lahendi veel üks sellest erinev lahend, siis pole võrrandisüsteem üheselt lahenduv, hoolimata keha koormamise viisist ja lõplike elementide meetod muutub antud olukorras kasutamatuks.

Ebastabiilsusele lähedane (*near-instability*) seisund tuleneb faktist, et fikseeritud rajatingimuse mõju kahaneb elemendi jäikusmaatriksile  $\mathbf{K}_\beta^e$  koos selle kauguse suurenemisega rajast. Ligikaudsel integreerimisel võib ühene lahend olemas olla, aga see on vastuolus füüsikaliste kaalutlustega. Tulemuseks võib olla näiteks tala negatiivne pikkus, kui lõplike elementide meetodit rakendatakse talale või vms. See tekib reeglina suurte rajatingimuste erinevuse korral. Lisaks sellele on veel läätselukuline-ebastabiilsus (*hourglass instability*), kus element omandab vastupanuta läätselukuju. See ei kandu edasi ja on lihtsalt avastatav.

Ebastabiilsuste vältimiseks tuleb integreerimisjärk hoida küllalt kõrge, mis tähendab suuremat arvutusmahtu, seetõttu on paljudes tarkvarasüsteemides õigele integreerimisjärgu määramisele pööratud suurt tähelepanu. Kui tegemist on konstantse elastsusmaatriksiga, siis on tarvis integreerida fikseeritud astmega polünoome. Kui valida piisavalt kõrge integreerimisjärk, saame täpse tulemuse. See on peamine kriteerium integreerimisjärgu määramiseks. Kui kasutada madalama järgu valemeid, siis rikutud deformatsioonienergiaga olekuid on vähemalt

$$2n - n_{pre} - 3n_{int}, \quad n_{pre} \geq 3 \quad (4.31)$$

kus  $n$  on tingimuste arv (vektori  $\mathbf{a}$  mõõde) ja  $n_{pre}$  on fikseeritud läbipainde tingimused ( $w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}$ ) ja  $n_{int}$  on itegreerimispunktide arv.



## 6 Kasutatavad ligikaudse integreerimise valemid

Kuna punktide arv on elemendis fikseeritud, siis võib kasutada efektiivseid Gaussi valemeid ilma integreerimistäpsuse kaotamise ohuta. Vaatleme esmalt tihemõõtmelist juhtu lihtsuse mõttes fikseerime lõigu  $[-1, 1]$ . Võtame  $2n - 1$  astme polünoomi

$$p(x) = \sum_{i=1}^{2n} \beta_i x^{i-1}.$$

Täpne integraal avaldub kujul

$$I = \int_{-1}^1 p(x) dx = \sum_{i=1}^{2n} \frac{2}{i} \beta_i. \quad (4.32)$$

Aproksimeerime integraali ligikaudselt kvadratuurvalemiga, jättes punktid  $\xi_j$  ja neile vastavad kaalud  $H_j$  määramata, selle tulemuseks on avaldis

$$I_1 = \sum_{j=1}^n H_j p(\xi_j) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{2n} \beta_i \xi_j^{i-1} = \sum_{i=1}^{2n} \beta_i \sum_{j=1}^n H_j \xi_j^{i-1}. \quad (4.33)$$

Võrreldes komponent haaval summade (4.32) ja (4.33) elemente ja arvestades, et kordajad  $\beta_i$  võivad olla suvalised, saame kordajate  $H_j$  ja punktide  $\xi_j$  määramiseks võrrandisüsteemi

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n H_j \xi_j^{i-1} &= \frac{2}{i} & i = 1, 3, 5, \dots, 2n-1 \\ \sum_{j=1}^n H_j \xi_j^{i-1} &= 0 & i = 2, 4, 6, \dots, 2n \end{aligned} \quad (4.34)$$

Lahendades selle võrrandisüsteemi<sup>24</sup>, saame Gaussi valemid.

Punktide arv	Sõlmed $\xi_j$	Kordajad $H_j$	Jääkliikme järk
$n = 1$	$\xi_1 = 0$	$H_1 = 2$	$O(h^2)$
$n = 2$	$\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\xi_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$	$H_1 = 1$ $H_2 = 1$	$O(h^4)$
$n = 3$	$\xi_1 = \sqrt{\frac{3}{5}}$ $\xi_2 = -\sqrt{\frac{3}{5}}$ $\xi_3 = 0$	$H_1 = \frac{5}{9}$ $H_2 = \frac{5}{9}$ $H_3 = \frac{8}{9}$	$O(h^6)$
$n = 4$	$\xi_1 = -\frac{1}{35}\sqrt{525 + 70\sqrt{30}}$ $\xi_2 = \frac{1}{35}\sqrt{525 + 70\sqrt{30}}$ $\xi_3 = -\frac{1}{35}\sqrt{525 - 70\sqrt{30}}$ $\xi_4 = \frac{1}{35}\sqrt{525 - 70\sqrt{30}}$	$H_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{36}\sqrt{30}$ $H_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{36}\sqrt{30}$ $H_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{36}\sqrt{30}$ $H_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{36}\sqrt{30}$	$O(h^8)$

<sup>24</sup>Selle juures on mõistlik kasutada sümmeetriakaalutlusi st. sõlmed ja nende kordajad  $H_i$  peavad olema sümmeetrilised 0 punkti suhtes.

Programmis kasutame integreerimisšabloonina lõiku  $[0, 1]$  ja siis vastavalt muutu-  
javahetusreeglile teisevad integreerimispunktid  $\xi'_i$  ja kaalud  $H_i$  kujule

$$\xi'_i = \frac{1 + \xi_i}{2}, \quad H'_i = \frac{H_i}{2}. \quad (4.35)$$

Jääkliikme järk  $O(h^n)$  tähendab, et valemi viga on tõkestatud lõigu pikkuse  $n$   
astmega ja valem integreerib täpsemalt madalama astme polünoome. Meie kon-  
tekstis tähendab see, et vähendades elementi 2 korda, väheneb integreerimisest  
tingitud viga  $2^n$  korda.

Tasapinnaliste piirkondade integreerimiseks on meil tarvis integreerida kahes  
šabloonis: ruudus  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  ja kolmnurgas tippudega  $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$  ja  $(0, 0)$ .  
Ruudukujulises šabloonis on lihtne üldistada Gaussi valemeid. Nimelt võime  
integraali arvutamise taandada ühemõõtmelisele juhule.

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 p(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^n H_i \int_{-1}^1 p(x, \eta_i) dx + R_1(q) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m H_i H_j p(\xi_j, \eta_i) dx + \sum_{i=1}^n H_i R_2(p(\cdot, \eta_i)) + R_1(q), \end{aligned} \quad (4.36)$$

kus  $q(y) = \int_{-1}^1 p(x, y) dx$  ning  $R_1$  ja  $R_2$  on vastavate kvadratuurvalemite jääk-  
liikmed. Kui võtta  $m = n$  ja kasutada Gaussi valemeid, siis arvestades, et  
meil on fikseeritud arv punkte saame valemi jääkliikme järguks mõlemas suunas  
 $O(h^{2n})$ . Seega integreerib valem täpselt polünoome, mille kummagi kordaja aste  
on väiksem kui  $2n$ .

Kolmnurkse piirkonna korral kasutame valemite tuletamiseks sama võtet,  
mis Gaussi valemitegi puhul. Fikseerime täieliku  $n$  astme polünoomi

$$p(x, y) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i+j \leq n+2}}^{n+1} \beta_{i,j} x^{i-1} y^{j-1}$$

ja integreerime selle antud kolmnurkses piirkonnas

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_0^{1-x} p(x, y) dy dx = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i+j \leq n+2}}^{n+2} \beta_{i,j} \int_0^1 \int_0^{1-x} x^{i-1} y^{j-1} dy dx \\ &= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i+j \leq n+2}}^{n+2} \beta_{i,j} \frac{1}{j} \int_0^1 x^{i-1} (1-x)^j dx = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i+j \leq n+2}}^{n+2} \beta_{i,j} \sum_{k=0}^j \frac{(-1)^k}{j(k+i)} \binom{j}{k} \end{aligned} \quad (4.37)$$

Tähistame  $\beta_{i,j}$  kordaja  $S_{i,j}$ . Olgu  $m$ -punktiline kvadratuurvalem kujul

$$I_1 = \sum_{k=1}^n H_k p(\xi_k, \eta_k) = \sum_{k=1}^m H_k \sum_{\substack{i,j=1 \\ i+j \leq n+2}}^{n+2} \beta_{i,j} \xi_k^{i-1} \eta_k^{j-1} = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i+j \leq n+2}}^{n+2} \beta_{i,j} \sum_{k=1}^m H_k \xi_k^{i-1} \eta_k^{j-1}, \quad (4.38)$$

siis analoogselt võrdustes (4.37) ja (4.38)  $\beta_{i,j}$  kordajaid võrdseks lugedes, saame  
võrrandististemi

$$S_{i,j} = \sum_{k=1}^m H_k \xi_k^{i-1} \eta_k^{j-1}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n+1, \quad i+j \leq n+2. \quad (4.39)$$

See süsteem on põhimõtteliselt lahendatav. Samas, kui kasutada sümmeetrilist sõlmede paigutust, lihtsustub võrrandisüsteem tunduvalt. Sealjuures jääb leidmata maksimaalse täpsusega integreerimisvalem, kuid lahendi lihtsus korvab selle. Pindalakoordinaatide  $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$  ja  $\mathcal{L}_3$  peamiste omaduste tõttu on kolme sümmeetrilise punkti koordinaatideks  $\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2\mathcal{L}_3$ -teljestikus

$$P_1 = (a, a, b), \quad P_2 = (b, a, a), \quad P_3 = (a, b, a),$$

kus  $b = 1 - 2a$ . Kuna meie integreerimis piirkond oli  $\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2$ -teljestikus, siis  $xy$ -teljestikus on punktide koordinaadid

$$P_1 = (a, a), \quad P_2 = (b, a), \quad P_3 = (a, b),$$

Vastavad kordajad  $H_k$  peavad sammuti sümmeetria tõttu võrdsed olema. Kokkuvõtteks taanduvad suured võrrandisüsteemid lihtsamateks. Tulemused on kokku võetud järgmises tabelis. Integreerimissõlmed ja kordajad langevad kokku raamatus [Lah98, lk. 87-88] toodud valemitega, kui arvestada meie šabloonkolmnurga pindala  $\frac{1}{2}$  ja seal on kolmnurga pindalaks võetud 1. Kõik jääkliikme järgust väiksema astmega polünoomid integreeritakse täpselt, erinevalt ruudukujulisest šabloonist, kus polünoomi astet vaadati mõlemas muutuja suhtes eraldi.

Sõlmede arv ja jääkliikme järk	Sõlmed $(\xi_k, \eta_k)$	Kordajad $H_k$
$m = 1, O(h^2)$	$\xi_1 = \frac{1}{3} \quad \eta_1 = \frac{1}{3}$	$H_1 = \frac{1}{2}$
$m = 3, O(h^3)$	$\xi_1 = \frac{1}{6} \quad \eta_1 = \frac{1}{6}$ $\xi_2 = \frac{2}{3} \quad \eta_2 = \frac{1}{6}$ $\xi_3 = \frac{1}{6} \quad \eta_3 = \frac{2}{3}$	$H_1 = \frac{1}{6}$ $H_2 = \frac{1}{6}$ $H_3 = \frac{1}{6}$
$m = 4, O(h^4)$	$\xi_1 = \frac{1}{5} \quad \eta_1 = \frac{1}{5}$ $\xi_2 = \frac{3}{5} \quad \eta_2 = \frac{1}{5}$ $\xi_3 = \frac{1}{5} \quad \eta_3 = \frac{3}{5}$ $\xi_4 = \frac{4}{5} \quad \eta_4 = \frac{1}{5}$	$H_1 = \frac{25}{96}$ $H_2 = \frac{25}{96}$ $H_3 = \frac{25}{96}$ $H_4 = -\frac{9}{32}$
$m = 6, O(h^5)$	$\xi_1 = \frac{4}{9} - \frac{1}{18}\sqrt{10} - \frac{1}{90}\sqrt{950 - 220\sqrt{10}}$ $\eta_1 = \frac{4}{9} - \frac{1}{18}\sqrt{10} - \frac{1}{90}\sqrt{950 - 220\sqrt{10}}$ $\xi_2 = \frac{1}{9} + \frac{1}{9}\sqrt{10} + \frac{1}{45}\sqrt{950 - 220\sqrt{10}}$ $\eta_2 = \frac{4}{9} - \frac{1}{18}\sqrt{10} - \frac{1}{90}\sqrt{950 - 220\sqrt{10}}$ $\xi_3 = \frac{4}{9} - \frac{1}{18}\sqrt{10} - \frac{1}{90}\sqrt{950 - 220\sqrt{10}}$ $\eta_3 = \frac{1}{9} - \frac{1}{9}\sqrt{10} + \frac{1}{45}\sqrt{950 - 220\sqrt{10}}$ $\xi_4 = \frac{4}{9} - \frac{1}{18}\sqrt{10} + \frac{1}{90}\sqrt{950 - 220\sqrt{10}}$ $\eta_4 = \frac{4}{9} - \frac{1}{18}\sqrt{10} + \frac{1}{90}\sqrt{950 - 220\sqrt{10}}$ $\xi_5 = \frac{1}{9} + \frac{1}{9}\sqrt{10} - \frac{1}{45}\sqrt{950 - 220\sqrt{10}}$ $\eta_5 = \frac{4}{9} - \frac{1}{18}\sqrt{10} - \frac{1}{90}\sqrt{950 - 220\sqrt{10}}$ $\xi_6 = \frac{4}{9} - \frac{1}{18}\sqrt{10} - \frac{1}{90}\sqrt{950 - 220\sqrt{10}}$ $\eta_6 = \frac{1}{9} + \frac{1}{9}\sqrt{10} - \frac{1}{45}\sqrt{950 - 220\sqrt{10}}$	$H_1 = \frac{1}{12} + \frac{1}{7440}\sqrt{950 - 220\sqrt{10}}$ $-\frac{3}{4960}\sqrt{950 - 220\sqrt{10}}\sqrt{10}$ $H_2 = \frac{1}{12} + \frac{1}{7440}\sqrt{950 - 220\sqrt{10}}$ $-\frac{3}{4960}\sqrt{950 - 220\sqrt{10}}\sqrt{10}$ $H_3 = \frac{1}{12} + \frac{1}{7440}\sqrt{950 - 220\sqrt{10}}$ $-\frac{3}{4960}\sqrt{950 - 220\sqrt{10}}\sqrt{10}$ $H_4 = \frac{1}{12} - \frac{1}{7440}\sqrt{950 - 220\sqrt{10}}$ $+\frac{3}{4960}\sqrt{950 - 220\sqrt{10}}\sqrt{10}$ $H_5 = \frac{1}{12} - \frac{1}{7440}\sqrt{950 - 220\sqrt{10}}$ $+\frac{3}{4960}\sqrt{950 - 220\sqrt{10}}\sqrt{10}$ $H_6 = \frac{1}{12} - \frac{1}{7440}\sqrt{950 - 220\sqrt{10}}$ $+\frac{3}{4960}\sqrt{950 - 220\sqrt{10}}\sqrt{10}$
$m = 7, O(h^6)$	$\xi_1 = \frac{2}{7} - \frac{1}{21}\sqrt{15}$ $\eta_1 = \frac{2}{7} - \frac{1}{21}\sqrt{15}$ $\xi_2 = \frac{3}{7} + \frac{2}{21}\sqrt{15}$ $\eta_2 = \frac{2}{7} - \frac{1}{21}\sqrt{15}$ $\xi_3 = \frac{2}{7} - \frac{1}{21}\sqrt{15}$ $\eta_3 = \frac{3}{7} - \frac{2}{21}\sqrt{15}$ $\xi_4 = \frac{3}{7} + \frac{2}{21}\sqrt{15}$ $\eta_4 = \frac{3}{7} + \frac{2}{21}\sqrt{15}$ $\xi_5 = \frac{3}{7} - \frac{2}{21}\sqrt{15}$ $\eta_5 = \frac{2}{7} + \frac{1}{21}\sqrt{15}$ $\xi_6 = \frac{2}{7} + \frac{1}{21}\sqrt{15}$ $\eta_6 = \frac{3}{7} - \frac{2}{21}\sqrt{15}$ $x_7 = \frac{1}{3} \quad \eta_7 = \frac{1}{3}$	$H_1 = \frac{31}{480} - \frac{1}{2400}\sqrt{15}$ $H_2 = \frac{31}{480} - \frac{1}{2400}\sqrt{15}$ $H_3 = \frac{31}{480} - \frac{1}{2400}\sqrt{15}$ $H_4 = \frac{31}{480} + \frac{1}{2400}\sqrt{15}$ $H_4 = \frac{31}{480} + \frac{1}{2400}\sqrt{15}$ $H_4 = \frac{31}{480} + \frac{1}{2400}\sqrt{15}$ $H_7 = \frac{9}{80}$

# V peatükk

## Praktilised tulemused

### 1 Lühike kokkuvõte

Lõplike elementide realiseerimiseks praktikas on mitmeid võimalusi. Antud töös seadsime eesmärgiks realiseerida peamise ja töömahukaima maatriksvõrrandi koostamise ja lahendamise osa. Lõplikult õnnestus realiseerida vaid kaks elemendi RE8 ja KE6, osaliselt on realiseeritud ülejäänud elemendid NE4 ja KE4. Kuna integreerida saab üldjuhul vaid ligikaudselt, siis ka rajatingimusi, koormust ja elastsusmaatriksit võib säilitada ligikaudselt kasutades interpolatsiooni.

Elementide realiseerimisel on püütud arvestada programmi laiendamise ja muutmise võimalusi, mistõttu on kasutatud objekt-orienteeritud lähenemist. Peale selle kindlustab objekt-orienteeritud lähenemine programmi lihtsa järkjärgulise testimise. Kuna integreerimine on töömahukas, siis kasutame üht efektiivsemat programmeerimiskeelt C++. Koodi kirjutamiseks ja kompileerimiseks kasutasime vabavara **Bloodshed Dev-C++ 4.0**[Dev4.0]. Testimiseks kasutasime arvutuspaketti **Maple V 4.00b**. Programmi kirjutamisel sai arvestatud võimaliku arvutustäpsuse suurendamise vajadusega. Seetõttu on peamised matemaatilised operatsioonid realiseeritud kooskõlas Victor Shoup'i arvutusteegiga **NTL**[Shoup01], et vajaduse korral võiks kasutada viimase täpsemaid ning efektiivsemaid arvutusprimitiive. Programmide dokumenteerimiseks on kasutatud UML klassidiagramme ja kasutuslugusid. Programmerimisel on püütud säilitada kolmandas ja neljandas peatükis sisse toodud tähistust, et lihtsustada koodi parandamist ja arendamist.

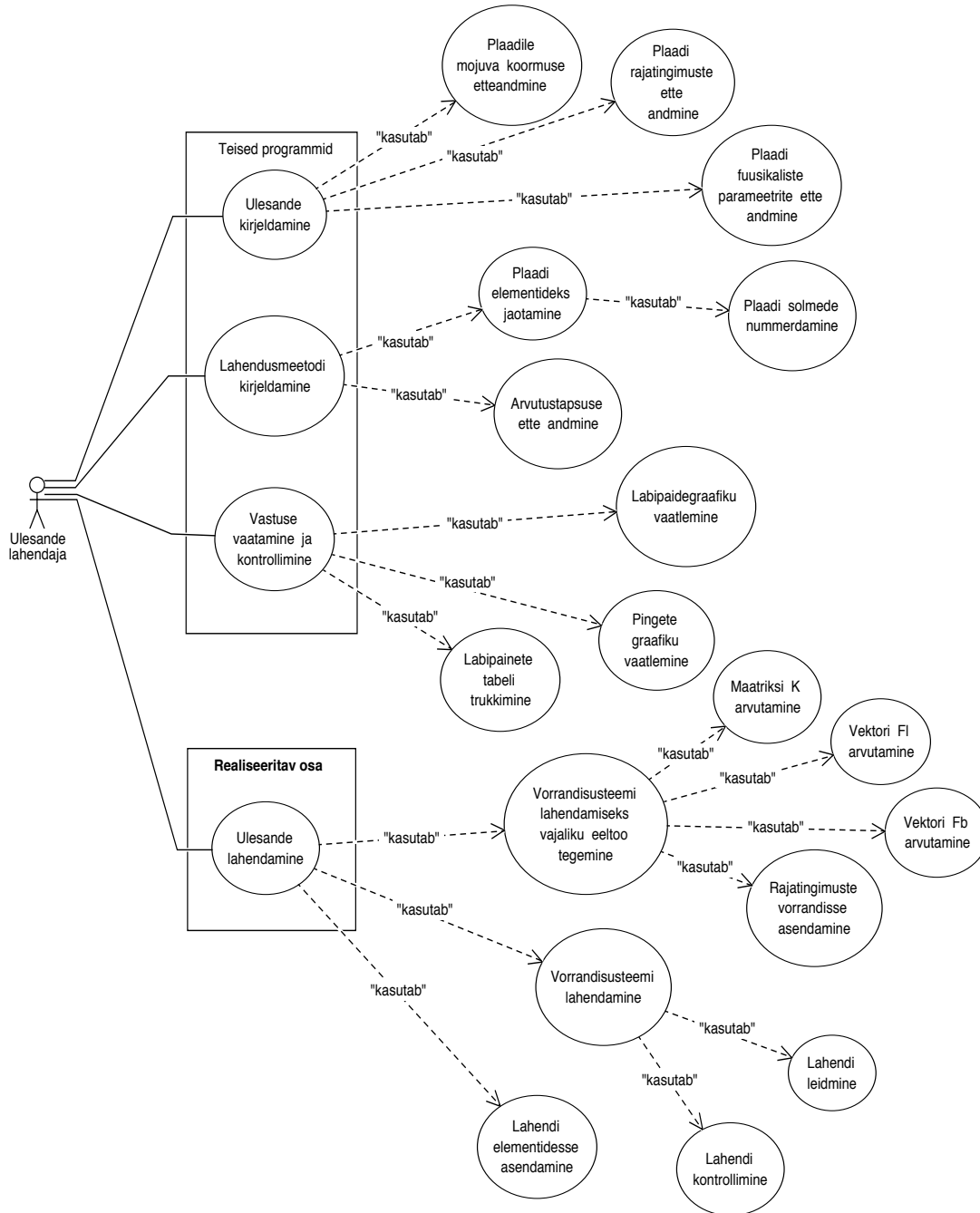
Lõplike elementide meedodil põhinev arvutiprogramm peaks põhimõtteliselt tegema kõiki järgneval lehel toodud joonisel märgitud tegevusi. Töö suure mahu tõttu võib osa vaja minevatest ülesannetest jätta teiste programmide nagu Maple või muu visualiseerimiskeskonna teha. Sellel põhjusel on elementide salvestusformaad tekstiline, et võimaldada lihtsat ühildamist teiste programmidega. Mõnevõrra langeb selle juures lugemis ja salvestamiskiirus, kuid see pole kõige ajamahukam osa.

Arvutusteks on tarvis realiseerida kolm põhilist klassi: kujufunktsioonide klass, elemendi klass ja plaadi klass. Kujufunktsioonide klass on vajalik elemendi kujufunktsioonide  $\mathbf{N}_\beta^e$ , nende gradiendi  $\nabla \mathbf{N}_\beta^e$  ja teiste tuletiste maatriksi  $\mathbf{B}_\beta^e$  arvutamiseks lokaalses teljestikus. Selleks on vastavalt kolmandale peatükile tarvis realiseerida šabloonfunktsioonid ja meeles pidada vastavad kordajad. Elemendi klass peab olema võimeline arvutama lokaalseid vektoreid  $\mathbf{f}_\beta^e$  ja  $\mathbf{f}_1^e$  ning maatriksit  $\mathbf{K}_\beta^e$  ja hiljem neid laiendama vastavalt teises peatükis toodud reeglitele. Selleks peab element teadma rajatingimusi, koormust, elastsusmaatriksit, sõlmi ning kujufunktsioone. Teises peatükis käsitlesime küll ainult koormusvälja, kuid matemaatiliselt on võimalik antud teooriasse tuua sisse ka diskreetsed jõud. Selleks kasutatakse Dirac'i  $\delta$ -funktsioone. Praktikas on nende integreerimine lihtsam kui koormusvälja integreerimine<sup>25</sup>

Plaadi klass peab kõigile elementidele andma õiged raja-, koormamis-, elastsus- ja muud integreerimiseks tarvilikud tingimused. Seejärel peab ta kokku

<sup>25</sup>Hetkel on küll diskreetsete jõudude integreerimine realiseerimata.

panema matriksvõrrandi  $\mathbf{Ka} = \mathbf{f}_b + \mathbf{f}_i$  ja eraldama arvatamatud read, asendama teada olevad rajatingimused vektorisse  $\mathbf{a}$  ning seejärel võrrandisüsteemi lahendama (kui see on võimalik). Peale selle peaks plaadi klass oskama lahendit asendada elementidesse ja tulemust väljastada nii tabeli kui graafikuna, kasutades Maple'i võimalusi.



Joonis 20: Peamised tegevused lõplike elementide meetodi lahendamisel.

## 2 Abiklassid

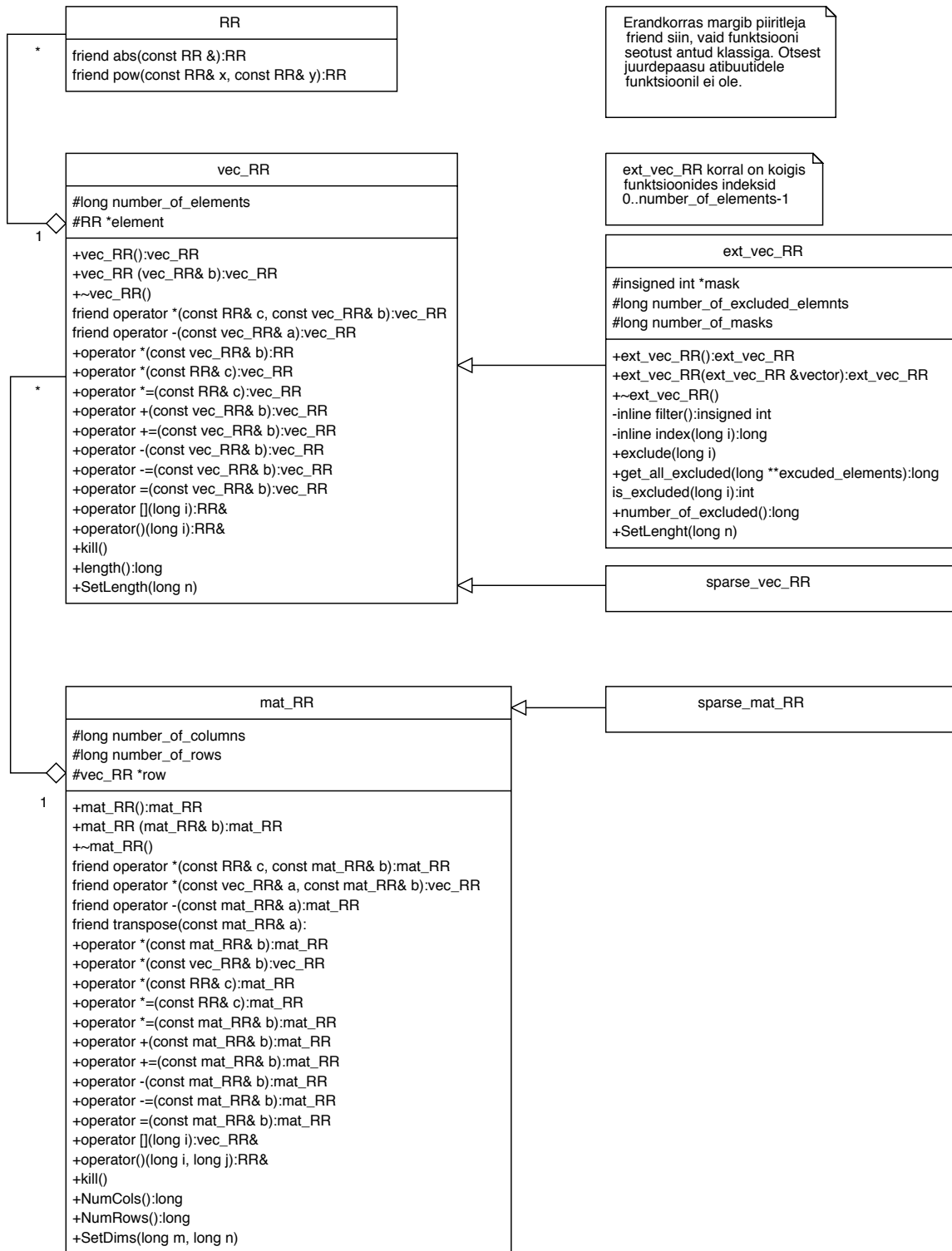
Et realiseerida elemente on vaja mitut abiklassi. Põhilised arvutustega seotud klassid on kirjutatud kooskõlas **NTL**-arvutusteebiga, et hiljem oleks vajaduse korral võimalik praegused klassid vastavate klasside vastu vahetada. Neist kolm klassi – realarvude klass **RR**<sup>26</sup>, reaalarvuliste vektorite klass **vec\_RR** ja reaalarvuliste maatriksite klass **mat\_RR** langevad täielikult kokku **NTL**-arvutusteebiga. Laiendatud vektorite klass **ext\_vec\_RR** ja hõredate maatriksite ning vektorite klassid **sparse\_vec\_RR** ja **sparse\_mat\_RR** võib soovi korral üle vaadata. Praktiliselt on viimasest kolmest klassist realiseeritud vaid laiendatud vektorite klass, mis peab meeles, millised komponendid on arvutamatud. Seda läheb otseselt vaja rajatingimuste vektori  $\mathbf{f}_b$  arvutamisel. Hõredaid maatrikseid saab erinevalt harilikest maatriksitest hoida arvuti mälus nii, et hõivatud on vähem mälu. Kuna mälu kasutus muutub probleemiks paljude sõlmede korral, siis hetkel on need klassid realiseermata. Samas on nii jäetud võimalus hiljem probleemide korral antud klassid kasutusele võtta. Kõik antud klassidega seotud funktsioonid ja operaatorid on defineeritud failides *abiklassid.h*(definiitsioonid) ja *abiklassid.cpp*. Vastavad klassidiagrammid on järgmisel leheküljel<sup>27</sup>

## 3 Vektorite ja sõlmede klassid

Lisaks suvalise pikkusega vektoritele on kolmandas ja neljandas peatükis olulisel kohal kahe- ja kolmemõõtmelised vektorid. Enamus arvutustest, mida on vaja ja teha kujufunktsioonide koefitsientide ning integreerimisel oluliste üleminekumaatriksite  $\mathbf{Q}^{-1}$  ja  $\mathbf{J}^{-1}$  leidmiseks, on operatsioonid vektoritega. Just neljandat peatükki arvestades on kahemõõtmeliste vektorite vektorkorrutis defineeritud reaalarvuna. Sõlmi võib vaadelda kui kahemõõtmelisi vektoreid koos järjekorranumbriga. Vastavad klassid on: kahemõõtmeline vektor **vect2D**, kolmemõõtmeline vektor **vect3D** ja sõlmede klass **node**. Peale tavalistele matemaatilistele operatsioonidele on realiseeritud sisestus-väljastusoperatsioonid: nii harilikus kirjajukus kui kümnendesituses. Sõlmede korral on lisaks realiseeritud erinevad sõlmede esitusviisid vastavalt Maple'i graafiku struktuurile. Veel on sõlmede elemendis hoidmiseks realiseeritud sõlmede järjendi klass **node\_list**, millele on lisatud täiendavaid võimalusi salvestamiseks ja lugemiseks. Klassid on koondatud failidesse *node.h* ja *node.cpp* ning neile vastavad klassidiagrammid on toodud tilejärgmisel lehel.

<sup>26</sup>Praktiliselt on RR defineeritud kui sissehitatud tüüp **double**.

<sup>27</sup>Klassidiagrammidel on piiritlejad tähistatud järgnevalt ”+” vastab piiritleja **public**, ”#” vastab piiritleja **protected** ja ”-” vastab piiritleja **private**. Funktsioonide ja operaatorite väljastatavad tüübid või klassid on funktsiooni lõpus kooloni järel. Päritatavad funktsioonid on järglaste klassides välja toodud vaid siis, kui need on ümber defineeritud.

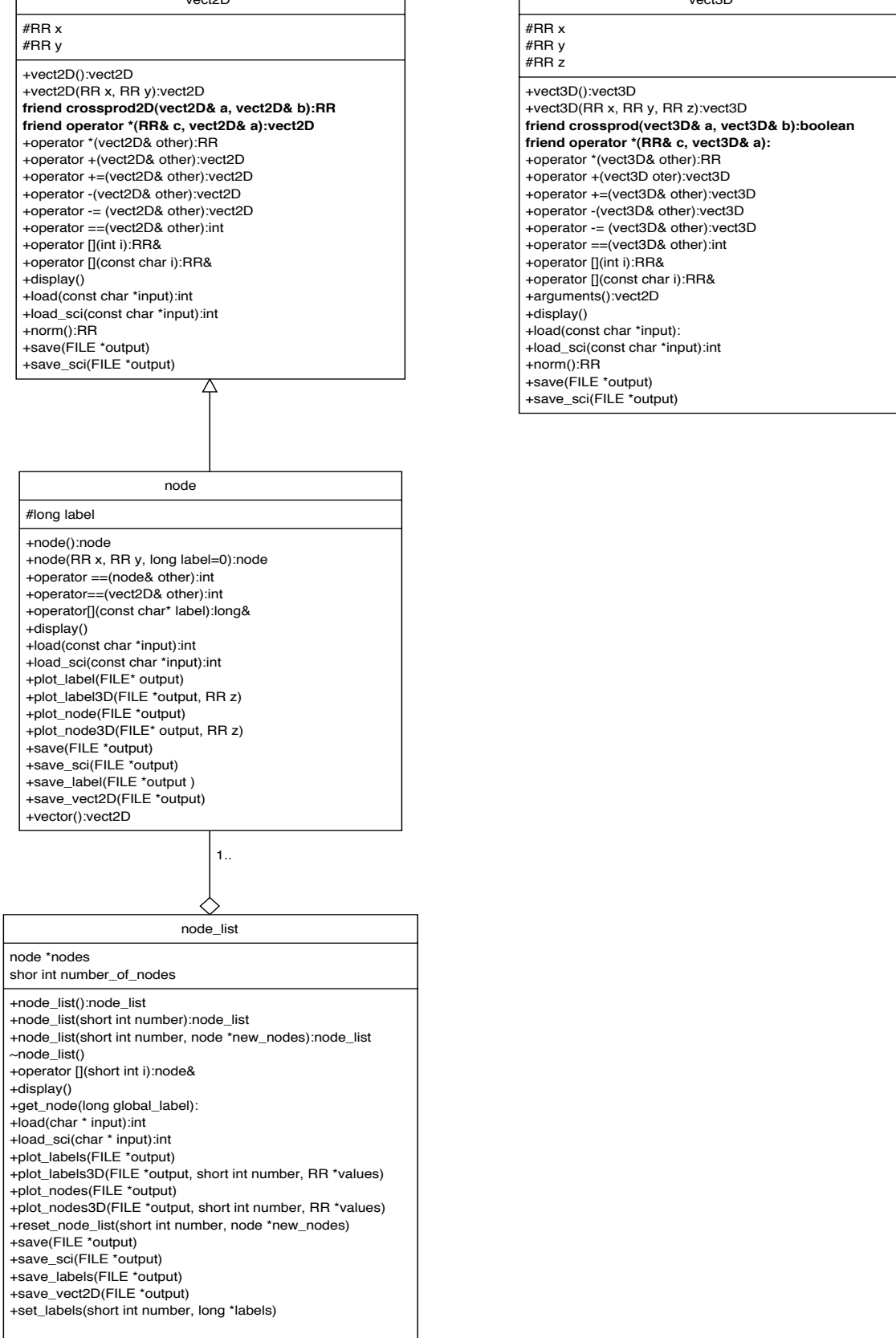


Erandkorras margib piiritleja friend siin, vaid funktsiooni seotust antud klassiga. Otsest juurdepaasu atibuutidele funktsioonil ei ole.

ext\_vec\_RR korral on koigis funktsioonides indeksid 0..number\_of\_elements-1

Joonis 21: Failidele *abiklassid.h* ja *abiklassid.cpp* vastavad klassidiagrammid.





Joonis 22: Failidele *node.h* ja *node.cpp* vastavad klassidiagrammid.

## 4 Erinevad interpolaatsiooni klassid

Kuna integreerimine toimub ligikaudselt ja tehnilisel on raske esitada suvalist funktsiooni programmi sisendina, siis interpoleerime rajatingimusi, koorumust ja elastsusmaatriksit elemendi lokaalses teljestikus. Selleks kasutame kahte tüüpi interpoleerivaid klasse: ühemõõtmelisi suuruseid interpoleerivaid klasse **const\_boundary\_function** ja **linear\_boundary\_function** ning kahemõõtmelisi interpoleerivaid klasse **NE4\_scalar\_field\_element** (NE4\*) ja **KE3\_scalar\_field\_element** (KE3\*). Peale interpolaatsiooni on klassidel defineeritud veel sisestus- ja väljastusoperatsioonid. Ühemõõtmelise interpolaatsiooni klassid on koondatud failidesse *boundary\_condition.h* ja *boundary\_condition.cpp*. Interpoleerimislõiguks on lõik  $[0, 1]$ . Lineaarse interpolaatsiooni korral on esimene sõlm punktis 0 ja teine punktis 1.

Kahemõõtmeline interpolaatsiooniklassid on failides *field.h* ja *field.cpp*. Lisaks on nendes failides diskreetse punktivälja klass **discrete\_field**, mis sisaldab endas kolmemõõtmelisi vektoreid, mille esimesed kaks komponenti näitavad väljapunkti asukohta ja kolmas välja väärtust. Vastavate operatsioonidega võib väljast eraldada punkte, mis asuvad kolmnurgas, nelinurgas ja lõigul.

Pideva välja klassid kasutavad interpoleerimiseks vastavaid kujufunktsioone ning väärtuse arvutamine toimub vastavalt valemile (2.13), mistõttu saab interpolaatsiooni defineerida juba abstraktses baasklassis **basic\_scalar\_field\_element**. Interpolaatsiooni sõlmed vastavad kolmnurkse elemendi (KE3\*) korral joonise 13 kolmele esimesele punktile ja nelinurkse elemendi korral joonise 17 punktidele. Veel on realiseeritud elastsusmaatriksi klass **elasticity\_matrix**, kus interpoleeritakse suurusi  $E$ ,  $t$  ja  $\nu$  vastavalt elemendi kujule klassidega (KE3\*) või (NE4\*) ning interpolaatsiooni punktid on võetud analoogselt.

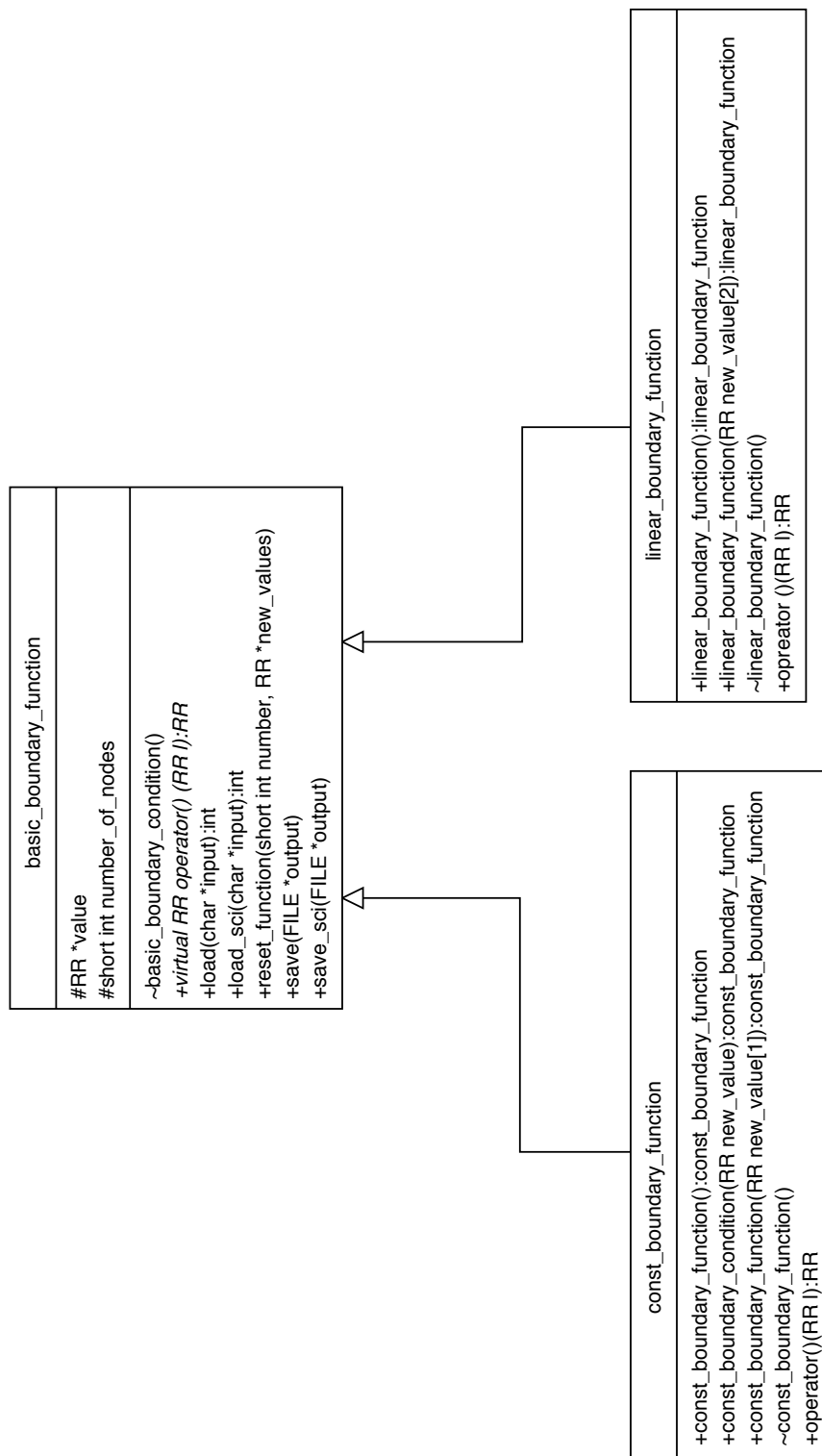
## 5 Kujufunktsioonide klassid

Erinevate elementide kujufunktsioonide klassid on koondatud failidesse *shape\_function.h* ja *shape\_function.cpp*. Esiteks on realiseeritud abstraktne baasklass **shape\_functions**, mis on vajalik vaid tehnilistel põhjustel ning seetõttu on arvutuslikud funktsioonid on virtuaalsed. Kujufunktsioonide vektori  $\mathbf{N}^e$  gradiendi  $\nabla \mathbf{N}^e$  ja maatriksi  $\mathbf{B}^e$  arvutamine toimub efektiivsuse huvides läbi viidete st. muudetakse sisendis olevat vektorit (maatriksit) mitte ei anta tulemus funktsiooni väljundina. See võimaldab kokku hoida mõningase aja mis kulub objektide loomiseks ja mälu hõlvamiseks ja vabastamiseks. Üksikute elementide kättesaamiseks olevad funktsioonid pole realiseeritud, kuna neid pole lõplike elementide meetodi korral vaja. Need on defineeritud igaks juhuks, et klass oleks täielik. Baasklassist põlvnevad kohe kolmandas peatükis olevad kujufunktsioonide klassid: **KE4\_shape\_functions**, **KE6\_shape\_functions**, **NE4\_shape\_functions** ning **RE8\_shape\_functions**. Kõik koefitsendid on võetud loomulikus järjestuses vastavatest valemitest. Kujufunktsioonide väärtused arvutatakse lokaalses teljestikus: kolmnurkse šablooni korral on selleks  $\mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2$ -teljestik ja nelinurkse elemendi korral  $\xi\eta$ -teljestik.

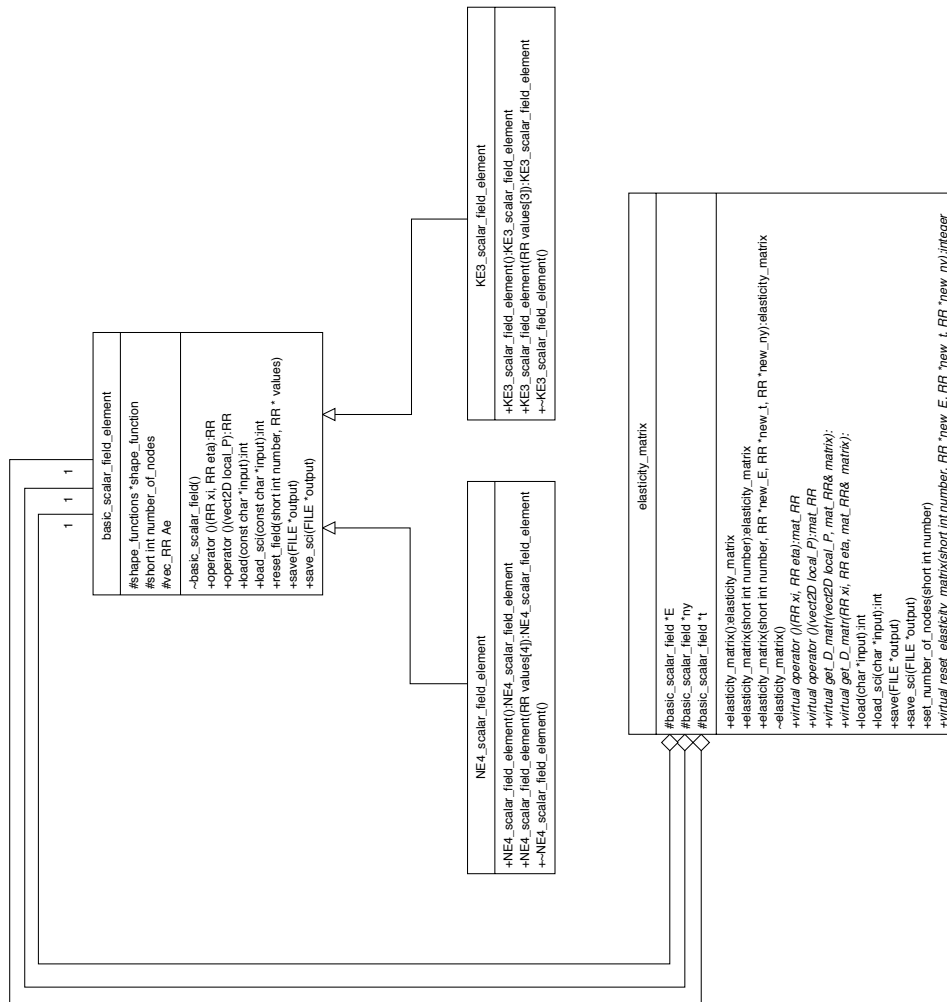
Peale nende on realiseeritud pideva välja interpoleerimiseks tarvilikud klassid **KE3\_field\_functions** ja **NE4\_field\_functions**. Kuna välja interpoleerimisel pole tarvis teada gradienti  $\nabla \mathbf{N}$  ja maatriksit  $\mathbf{B}$ , siis põlvnevad need funktsioonid vahepealsest abstraktselt klassist **field\_functions**, mis annab vastava te pöördumiste korral veateate. Klass **KE3\_field\_functions** esitab kolmnurga

pindalakoordinaate  $\mathbf{N}^e = (\mathcal{L}_3, \mathcal{L}_3, \mathcal{L}_3)$  ja klass `NE4_field_functions` esitab kujufunktsioone (3.26).

Kõik kujufunktsioonid on testitud võrreldes kujufunktsioonide  $\mathbf{N}^e$ , gradiendi  $\nabla \mathbf{N}^e$  ja maatriksi  $\mathbf{B}^e$  väärtusi Maple'is saadud tulemustega. Selleks kasutasime tihedat ruudustiku, kus punktide arv ületas mitmekordselt polünoomi kordajate arvu, et vältida juhuslikust sõltuvusest tulenevaid peidetud erinevusi. Nelinurkse elemndi korral sai võetud  $6 \times 6$  ruudustik ja kolmnurkse elemendi korral  $10 \times 10$  ruudustiku alumine pool. Testi tulemused on failides: *KE4test1.mws*, *KE6test1.mws*, *NE4test1.mws* ja *RE8test1.mws*.



Joonis 23: Failidele `boundary_condition.h` ja `boundary_condition.cpp` vastavad klassidiagrammid.



```

discrete_field

#long max_number_of_fieldpoints
#long number_of_fieldpoints
#vec3D *point_source

+discrete_field(long number);discrete_field
~discrete_field()
+operator /()vec3D&
+add_fieldpoint(vec3D new_fieldpoint);int
+delete_fieldpoint(long j);int
+number_of_points();
+load(char *input);int
+load_sci(char *input);int
+plot(FILE *output)
+point_sources_in_line_segment(vec2D nodes[2], vec3D *point_sources, int include_boundary=1);long
+point_sources_in_triangle(vec2D nodes[3], vec3D *point_sources, int include_boundary=1);long
+point_sources_in_quadring(vec2D nodes[4], vec3D *point_sources, int include_boundary=1);long
+reset_field(long number, vec3D *new_point_sources=0)
+save(FILE *output)
+save_sci(FILE *output)
  
```

Joonis 24: Failidele *field.h* ja *field.cpp* vastavad klassidiagrammid.

Joonis 25: Failidele *shape\_functions.h* ja *shape\_functions.cpp* vastavad klassidiagrammid.

## 6 Elementide klassid

Kõik elemendid pärinevad abstraktselt klassist `basic_element`, mis sisaldab endas artibuutidena sõlmi, rajatingimusi, normaalide orientatsiooni, kordajate vektorit  $\mathbf{a}^e$ , kujufunktsioone, koormuse ja elastsusmaatriksi interpolatsioon ning diskreetset koormust. Lisaks sellele on kogu klassil ühised integreerimissõlmed ja -kordajad:  $XI$  ja  $h$  on vastavalt lõigu  $[0, 1]$ ,  $P$  ja  $hh$  on ruudu  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  ning  $Q$  ja  $H$  on šabloonkolmnurga integreerimissõlmed ja -kordajad. Lisaks on veel üleliigsete arvutuste vältimiseks lõigu  $[-1, 1]$  integreerimispunktid  $XI1$ . Muutujate esimene indeks näitab valemi numbrit<sup>28</sup>. Integreerimiskordajate ja sõlmede väärtustamiseks on klassist sõltumatu funktsioon `init_integration`. See on tarvis programmis üks kord enne integreerimist välja kutsuda. Selle tulemusena arvutatakse välja integreerimissõlmed ja -kordajad. See lähenemine võimaldab klassi `RR` arvutustäpsust muuta ilma, et tekiks komplikatsioone integreerimisvalemite täpsusega. Integreerimisvalemite sisen-diteks on funktsiooni väärtused vastavates sõlmedes ja väljundi on kvadratuurvalemi väärtus. Integreerimisvalemid on testitud, kasutades kõiki vastavat järku ühikmonoome ja võrreldes Maple'i täpseid tulemusi ligikaudsetega. Integreerimisega seotud funktsioonides realiseerimata diskreetse koormusele vastava integraali leidmine (`add_dikrete_integral_to_FI`).

Elementide KE6 ja RE8 korral on tarvis servade normaalides suund iga elemendi korral eraldi määrata, et poleks märgi erinevusi elemendi tingimuste vektori  $\mathbf{a}^e$  ja globaalse tingimuste vektori  $\mathbf{a}$  vahel. Selleks on funktsioon `set_orientation`, kus sisendi vastava biti väärtus määrab ära vastava serva normaali orientatsiooni. Biti väärtusele üks vastab välisnormaal ja nullile sisenormaal. Peale selle on realiseeritud mitmesuguseid visualiseerivaid funktsioone, mis loovad elemendile vastava Maple'i graafiku struktuuri. Funktsioon `plot2D` joonistab elemendi kahemõõtmelise kujutise koos sõlmede ja rajatingimustega. Esimest tüüpi tingimusele vastab punane, teist tüüpi tingimusele sinine, kolmandat tüüpi tingimusele roheline ning tundmatut tüüpi tingimusele lillakas serv ning rajatingimusteta serv on must. Elemendi salvestamine ja lugemine toimub tekstilisel kujul:

```
***ELEMENT(  
  NODES([1,0,1],[0,1,2],[0,0,3],[0.5,0.5,4],[0.5,0.0,5],[0,0.5,6]),  
  LOADING(0,0,0),  
  ELASTICITY(E(1,1,1),t(3,4,1),nu(1,3,7)),  
  DISCRETELOADING([0,0,1],[0.5,0.5,10]),  
  BOUNDARY(ORIENTATION(7),[0,1,F1(1,1),F2(0,0)],[2,2,F1(1,1),F2(0,0)])  
)
```

Esimesel real on elemendi tüüp, teisel real on elemendi sõlmed. Nurksulgudes olevad esimesed kaks komponenti on elemendi koordinaadid globaalses teljestikus ja viimane on sõlme number. Need on kohustuslikud read. Seejärel saab anda elemendi koormuse ja elastsusmaatriksi andes funktsioonide väärtused interpolatsioonisõlmedes. Diskreetse koormuse punktid on antud lokaalses teljestikus. Rajatingimustest on esimene normaalide orientatsioon, seejärel tulevad rajatingimused. Esimene komponent nurksulgudes näitab elemendi serva ja teine rajatingimuse tüüpi<sup>29</sup>. Seejärel on antud kahe rajafunktsiooni väärtused interpolatsioonisõlmedes. Tingimuse 0 korral on  $F1 = w$  ja  $F2 = \frac{\partial w}{\partial n}$ , tingimuse 1

<sup>28</sup>See vastab neljadas peatükis esitatud valemite järjekorrale, kui alustada nummerdamist nullist. Integreerimismeetodid on nummerdatud alates ühest.

<sup>29</sup>Nummerdamist alustatakse mõlema korral nullist.

korral  $F1 = w$  ja  $F2 = M_{nn}$  ning 2 korral  $F1 = Q_{nz} + \frac{\partial M_{nm}}{\partial \mathbf{m}}$  ja  $F2 = M_{nn}$ . Interpolatsioonisõlmed tuleb anda piki serva vastu päeva. Rajafunktsioonid parametrizeeritakse suhtelise pikkuse abil st.  $f_i = f(\zeta)$ , kus  $\zeta = \frac{l}{l_{serv}}$ , kusjuures ühe elemendi külgedel peab olema sama liiki aproksimatsioon. Elemendi lõpetab eraldi real seisev sulg Kõik tingimused tuleb anda eraldi ridadel ilma vahedeta.

Elemendi sõlmed tuleb anda vastavalt kolmandas peatükis toodud joonistele st. vastupäeva. Plaadi sõlmede nummerdamisel on oluline, et esimese sõlme number oleks 0 ja järgnevalt poleks ühtegi arvu vahele jäetud – see tagab tühjade ridadeta maatriksvõrrandi tekkimise. Realiseeritud elementide korral on võimalik muuta korruga sama tüüpi elementide ühe- ja kahemõõtleliste kvadratuurvalemite integreerimisjärku<sup>30</sup> kasutades funktsioonine *set\_\*\*\*\_integration\_order*. Algselt on elementidel KE6 ja RE8 nii ühe- kui ka kahemõõtmeline integreerimisjärk kaks. Sellest piisab konstantse koormuse ja elastsusmaatriksi korral täpselt integreerimiseks. Elemendil sõlmede korral kontrollitakse, et vastavad sõlmed asuksid külgede keskel ning vajaduse korral muudetakse sõlmede asukohta. Elemendi RE8 korral kontrollitakse lisaks sellele elemendi täisnurksust. Funktsiooni *set\_RE8\_deflection* võimalik määrata, kui palju võivad elemendi nurgad  $\varphi_i$  erineda täisnurgast. Erinevuse mõõdupuuks on  $\cot \varphi_i$ , mis väikeste nurkade korral on ligikaudu võrdne kõrvalekaldega täisnurgast radiaanides.

Maatriksid *inv\_Q* ja *inv\_J* ei ole võrdsed maatriksitega  $\mathbf{Q}^{-1}$  ja  $\mathbf{J}^{-1}$ , vaid avaldistes (4.12), (4.13), (4.3) ja (4.4) paremal pool olevad maatriksid (ilma eesoleva kordajata). See suurendab arvutuste efektiivsust, kuna mõningad jagamised saab taandada.

Kõikide elementide abstraktne baasklass **basic\_element** asub failides *basic\_element.h* ja *basic\_element.cpp*. Elementide KE6 ja RE8 klassid asuvad failides *KE6\_element.h*, *KE6\_element.cpp*, *RE8\_element.h* ning *RE8\_element.cpp*. Elemente RE8 ja KE6 on testitud kontrollides integreerimist šabloonelemendis ja lisaks suvaliselt valitud proovielemendis. Testprogrammid on vastavalt *KE6test1.cpp* ja *RE8test1.cpp* ning neile vastavad Maple'i töölehed väljundite kontrollimiseks *KE6test2.mws* ja *RE8test2.mws*. Järgnevalt toome klassidele vastavad diagrammid.

---

<sup>30</sup>Kui šabloon on kolmnurkne, siis on integreerimisjärk täpselt integreeritava polünoomi "maksimaalne" aste. Ristiktlüki kujulise šablooni korral on see integreeritava polünoomi "maksimaalne" aste  $\xi$  ja  $\eta$  suhtes.



basic_element
<pre> #short int number_of_nodes #node_list nodes #short int number_of_boundary_sides #short int *boundary_sides #short int *boundary_type #basic_boundary_function (*boundary_function)[2] #short int orientation #vec_RR Ae #shape_functions *shape_function #discrete_field *discrete_load #basic_scalar_field *element_load #elasticity_matrix D #static RR h[4][4] #static RR hh[4][16] #static RR H[5][7] #static RR XI[4][4] #static RR XI1[4][4] #static vect2D P[4][16] #static vect2D Q[5][7] </pre>
<pre> +virtual~basic_element() #inline end_element(FILE *output, char *buffer, int buffer_size) #inline parse_line(char *line) #inline strcount(const char *haystack, const char *needle) #add_discrete_integral_to_Fl(vec_RR vector) #extend_and_add_discrete_integral_to_Fl(vec_RR Global_Fl) #int_gauss1D_*(RR *f):RR #int_gauss2D_*(RR *f):RR #int_triangle_*(RR *f):RR #load_boundary_condition(char *input):int #w(xi, eta):RR +display_boundary() +display_nodes() +display_all() +get_Ae() +virtual_plot_boundary(FILE *output) +plot_labels2D(FILE *output) +plot_nodes2D(FILE *output) +plot2D(FILE *output) +virtual_plot_labels3D(FILE *output): +virtual_plot_nodes3D(FILE *output) +virtual_plot_w(FILE *output, short int new_grid[2]=0) +plot3D(FILE *output) +virtual_load(FILE *output):int +virtual_save(FILE *output) +virtual_reset_boundary_functions(short int number, RR (*new_x)[2], RR (*new_y)[2]) +virtual_reset_boundary_functions(short int number, RR *new_x, RR *new_y) +virtual_reset_nodes(short int number, nodes* new_nodes) +virtual_reset_discrete_loading(long number, vect3D new_sources=0) +set_Ae(short int number, RR *new_Ae) +set_border(short int number, short int *sides) +set_elasticity_matrix(short int number, RR *new_E, RR *new_t, RR *new_ny) +set_loading(short int number, RR *new_values) +set_orientation(short int orientation) +virtual_evolute_Fb(ext_vec_RR&amp; Fb ): +virtual_evolute_Fl(vec_RR &amp;F) +virtual_evolute_K(mat_RR&amp; K) +virtual_extend_Fb(sparse_vec_RR global_Fb) +virtual_extend_Fl(sparse_vec_RR global_F) +virtual_extend_K(sparse_mat_RR global_K) </pre>

Joonis 26: Failidele *basic\_element.h* ja *basic\_element.cpp* vastavad klassidiagrammid.

KE6_element
<pre> -enum{number_of_shape_functions=6} -mat_RR inv_J -mat_RR inv_Q -RR det_J -<b>static short int grid[2]={10,10}</b> -<b>static short int order_of_1Dintegration</b> -<b>static short int order_of_2Dintegration</b> </pre>
<pre> +KE6_element():KE6_element +KE6_element(node new_nodes[6], new_orientation=7):KE6_element +~KE6_element() <b>friend set_KE6_grid(short int x, short int y)</b> <b>friend set_KE6_integration_order(short int order1D, short int order2D)</b> -inline plot_rectangle(FILE *output, float x0, float y0, float z0, float x1, float y1, float z1, float x2, float y2, float z2, float x3, float y3, float z3, const char *eraldaja="") -inline plot_triangle(FILE *output, float x0, float y0, float z0, float x1, float y1, float z1, float x2, float y2, float z2, const char *eraldaja="") -add_and_extend_to_Fb(ext_vec_RR Global_Fb, short int side_index) -add_to_Fb(ext_vec_RR vector, short int side_index) -correct_nodes() -correct_nodes(nodes nodes[6]) -inverse_transformation(vect3D&amp; point) -inverse_transformation(vect2D&amp; point) -set_coefficients(const vect2D&amp; l12, const vect2D&amp; l23, const vect2D&amp; l31) -set_inv_J(const vect2D&amp; l12, const vect2D&amp; l23, const vect2D&amp; l31) -set_inv_Q(const vect2D&amp; l12, const vect2D&amp; l23, const vect2D&amp; l31) +virtual evolute_Fb(ext_vec_RR&amp; vector) +virtual evolute_Fl(vec_RR&amp; vector) +virtual evolute_K(mat_RR&amp; matrix) +virtual extend_Fb(ext_vec_RR&amp; Global_Fb) +virtual extend_Fl(vec_RR&amp; Global_Fl) +virtual extend_K(sparse_mat_RR&amp; K) +virtual load(FILE *input):int +virtual plot_boundary(FILE *output) +virtual plot_labels3D(FILE *output) +virtual plot_nodes3D(FILE *output) +virtual plot_w(FILE *output, short int new_grid[2]=0) +virtual reset_discrete_field(long number, vect3D *new_sources=0) +virtual reset_nodes(short int number, node *new_nodes) +virtual save(FILE *output) </pre>

Joonis 27: Failidele *KE6\_element.h* ja *KE6\_element.cpp* vastavad klassidiagrammid.

RE8_element
<pre> -enum{number_of_shape_functions=8} -mat_RR inv_J -mat_RR inv_Q -RR S -<b>static RR max_deflection</b> -<b>static short int grid[2]={10,10}</b> -<b>static short int order_of_1Dintegration</b> -<b>static short int order_of_2Dintegration</b> </pre>
<pre> +RE8_element():RE8_element +RE8_element(node new_nodes[8], new_orientation=15) ~RE8_element() <b>friend set_RE8_deflection(RR max_deflection):</b> <b>friend set_RE8_grid(short int x, short int y):</b> <b>friend set_RE8_integration_order(short int order1D, short int order2D):integer</b> -add_to_Fb(ext_vec_RR vector, short int side_index): -add_and_extend_to_Fb(ext_vec_RR Global_Fb, short int side_index): -correct_nodes(): -correct_nodes(nodes nodes[8]) -inverse_transformation(vect3D&amp; point): -inverse_transformation(vect2D&amp; point): -set_coefficients(const vect2D&amp; l12, const vect2D&amp; l23): -set_inv_J(const vect2D&amp; l12, const vect2D&amp; l23): -set_inv_Q(const vect2D&amp; l12, const vect2D&amp; l23): -unrectangular(const vect2D&amp; l12, const vect2D&amp; l23):boolean +virtual evolute_Fb(ext_vec_RR&amp; vector): +virtual evolute_Fl(vec_RR&amp; vector): +virtual evolute_K(mat_RR&amp; matrix): +virtual extend_Fb(ext_vec_RR&amp; Global_Fb): +virtual extend_Fl(vec_RR&amp; Global_Fl): +virtual extend_K(sparse_mat_RR&amp; K): +virtual load(FILE *input): +virtual plot_boundary(FILE *output): +virtual plot_labels3D(FILE *output): +virtual plot_nodes3D(FILE *output): +virtual plot_w(FILE *output, short int new_grid[2]=0): +virtual save(FILE *output): +virtual reset_discrete_loading(long number, vect3D *new_sources=0): +virtual reset_nodes(short int number, node *new_nodes) </pre>

Joonis 28: Failidele *RE8\_element.h* ja *RE8\_element.cpp* vastavad klassidiagrammid.

## Viited

- [Ad/Clo61] A. Adini, R.W. Clough, Analysis of plate bending by the finite element method, Report to National Science Foundation, USA, G.7337.
- [Cook95] R.D. Cook, Finite Element Modeling for Stress Analysis, John Wiley & Sons, 1995.
- [Hug87] T.R.J Hughes, The Finite Element Method. Linear Static and Dynamic Finite Element analysis, Prentice-Hall, New York, 1987.
- [Ka/Mo/Ne] Д.Каханер, К. Моулер, С.Неш, Численные методы и программное обеспечение, "Мир", Москва, 1998.
- [Kirs/Arj99] J. Kirs, G.Arjassov, Sissejuhatus lõplike elementide meetodisse I, TTÜ kirjastus, Tallinn, 1999.
- [Lahe98] A. Lahe, Lõplike elemetide meetod, Tallinn 1998.
- [Mel63] R.J. Melosh, Basic of derivation of matrices for direct stiffness method, Journal of AIAA,1,1631-7, 1963.
- [Mor71] L.S.D. Morley, The constant bending-moment plate bending element, Journal of Strain Analysis,6, no. 1, 1971.
- [OttPet92] N. Ottosen, H. Petersson, Introduction to the Finite Element Method,Prentice-Hall International ,1992.
- [Zin77] O.C. Zienkiewicz, The Finite Element Method, 3rd edn, McGraw-Hill, New York 1977.
- [Dav96] С. Р. Левис,С++для чайников( tõlge inglise keelest), Диалектика, Киев, 1996.
- [Kaf98] D. Kafura, Objekt-Oriented Software Design and Construction With C++, Prentice-Hall 1998.
- [Shoup01] Victor Shoup, C++ arvutustee NTL-5.0c  
<http://www.shoup.net/ntl>
- [Dev4.0] Vabavara C++ kompilaator  
<http://www.blodshed.net/devcpp.html>

# Summary

## The Finite Element Method

Sven Laur

Many practical engineering problems are connected with static loading. Main goal is usually to estimate deformations caused by loading. Sometimes it's also important to get approximate values of critical loading. Mathematical formalization of the problem usually gives a rise to the sophisticated partial differential equations which are hard or even impossible to solve. This is a main motivation for using various numerical methods in the stress analysis. The finite element method is one of them. It is widely used for engineering because it is effective and gives good results as long it's applied in proper way.

This paper mainly tries to solve various problems which will arise when someone tries to implement finite element modeling in plate theory. In the first section we introduce main concept of stress theory and Kirchhoff's plate theory. We will formulate equilibrium condition, constitutive and kinematic relations for plates. In the second section we establish weak form of equilibrium equation for plates and introduce main principles of the finite element method. The third and the fourth section is concentrated on various practical problems which accompany the finite element method. We study four plate elements, establish shape functions and according derivatives for each element. We also discuss wide range of integration problems from integral transformations to numerical integration methods. Last section describes how we plan to implement finite element method and what is already done. The section contains various UML class diagrams and brief description of implemented classes.